# MỞ ĐẦU

Chúng ta biết rằng trong chương trình Toán học ở trường THCS hiện nay, có những bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của một biểu thức khi học sinh gặp phải thì rất là bỡ ngỡ và lúng túng . Vì trong chương trình Toán THCS SGK chưa đề cập nhiều về cách giải. Do đó, nhiều học sinh chưa có được phương pháp giải những bài toán dạng như thế này, mà dạng toán này chúng ta đều thấy ở các đề thi học kỳ, HSG, đề thi tuyển sinh vào lớp 10, ….

Vì thế trong quá trình dạy học (dạy học tự chọn, dạy BDHSG,…) . Chúng ta cần phải trang bị cho học sinh nắm được một số phương pháp giải thường gặp nhất trong chương trình Toán THCS. Để từ đó, mỗi học sinh tự mình giải được các bài toán dạng này một cách chủ động và sáng tạo.

Đứng trước thực trạng trên, với tinh thần yêu thích bộ môn, muốn được đóng góp phần nào để gỡ rối cho học sinh. Tôi xin đưa ra một số phương pháp thường gặp để tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức.

# NHỮNG CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ HƯỚNG GIẢI QUYẾT

1. Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ để biến đổi biểu thức về dạng:

* $A = a + [f(x)]^2 \geq a$ suy ra $\min A = a$ khi $f(x) = 0$

* $B = b - [f(x)]^2 \leq b$ suy ra $\max B = b$ khi $f(x) = 0$

2. Áp dụng tính chất : $|x| + |y| \geq |x + y|$ để tìm GTNN

Dấu “=” xảy ra khi $x.y \geq 0$

3. Áp dụng tính chất : $|x| - |y| \leq |x - y|$ để tìm GTLN

Dấu “=” xảy ra khi $x \geq y \geq 0$ hoặc $x \leq y \leq 0$

4. Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$ ($a \geq b \geq 0$ ) để tìm GTLN.

Dấu “=” xảy ra khi $b(a-b) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ hoặc $a = b$

5. Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ ($a , b \geq 0$ ) để tìm GTNN

Dấu “=” xảy ra khi $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$

6. Áp dụng bất đẳng thức CôSi:

+ Với $a \geq 0, b \geq 0$ thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

+ Với $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \geq 0$ thì $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ (2)

Dấu “=” xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$

***Từ đẳng thức (1) ta suy ra:***

- Nếu $a.b = k$ ( không đổi) thì $\min(a + b) = 2\sqrt{k} \Leftrightarrow a = b$

- Nếu $a + b = k$ (không đổi ) thì $\max(a.b) = \frac{k^2}{4} \Leftrightarrow a = b$

***Từ đẳng thức (2) ta suy ra:***

- Nếu $a_1.a_2.a_3 \dots. a_n = k$ (không đổi ) thì $\min(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = n\sqrt[n]{k}$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = k$ (không đổi ) thì $\max(a_1.a_2.a_3 \dots. a_n) = \left(\frac{k}{n}\right)^n$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

7. Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$)

Dấu '=" xảy ra khi phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$ ( $x = -\frac{b'}{a}$ )

# NỘI DUNG

## A/ Phương pháp 1:

Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ để biến đổi biểu thức về dạng:

* $A = a + [f(x)]^2 \geq a$ suy ra minA = a khi f(x) = 0

* $B = b - [f(x)]^2 \leq b$ suy ra maxB = b khi f(x) = 0

Thí dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = 4x^2 + 4x + 11$

b) $B = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

c) $C = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7$

Giải:

a) $A = (4x^2 + 4x + 1) + 10 = (2x + 1)^2 + 10 \geq 10$

Suy ra minA = 10 khi $x = -\frac{1}{2}$

b) $B = (x - 1)(x + 6)(x + 2)(x + 3)$

$= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

Suy ra minB = -36 khi x = 0 hoặc x = -5

c) $C = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 2$

$= (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2 \geq 2$

Suy ra minC = 2 khi x = 1 và y = 2

Thí dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = 5 - 8x - x^2$

b) $B = 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$

Giải:

a) Ta có $A = -(x^2 + 8x + 16) + 21$

$= -(x+4)^2 + 21 \le 21$

Suy ra maxA = 21 khi x = -4

b) Ta có B = $-(x^2 - 2x + 1) - (4y^2 + 4y + 1) + 7$

$= -(x-1)^2 - (2y+1)^2 + 7 \le 7$

Suy ra maxB = 7 khi x =1 và y = $-\frac{1}{2}$

**<u>Bài tập:</u>**

1. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $A = 4 - x^2 + 2x$

b) $B = 4x - x^2$

<u>Giải:</u>

a) $A = 4 - x^2 + 2x = 5 - (x^2 - 2x + 1) = 5 - (x-1)^2 \le 5$

Suy ra maxA = 5 khi x = 1

b) $B = 4x - x^2 = 4 - (x^2 - 4x + 4) = 4 - (x-1)^2 \le 4$

Suy ra maxB = 4 khi x = 2

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = x^2 + 5y^2 - 2xy + 4y + 3$

b) $B = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2)$

c) $C = x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x - 22y + 28$

<u>Giải:</u>

a) $A = (x^2 - 2xy + y^2) + (4y^2 + 4y + 1) + 2$

$= (x-y)^2 + (2y+1)^2 + 2 \ge 2$

Suy ra minA =2 khi $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy minB =2 khi x = y = $-\frac{1}{2}$

b) $B = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2)$

Đặt $t = x^2 - 2x \Rightarrow B = t(t+2) = t^2 + 2t = (t^2 + 2t + 1) - 1$

$= (t+1)^2 - 1 \geq -1$

$\Rightarrow$ MinB = -1 $\Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Vậy minB = -1 khi x = 1

c) $C = (x-2y)^2 + 10(x-2y) + (y-1)^2 + 25 + 2$

$= (x-2y+5)^2 + (y-1)^2 + 2 \geq 2$

$\Rightarrow$ MinC = 2 khi $\begin{cases} y-1=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases}$

Vậy minC = 2 khi x = -3, y = 1

3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

A = $\sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}}$

<u>Giải:</u>

Ta có A = $\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \leq \sqrt{1} = 1$

Suy ra maxA =1 khi x = $\frac{1}{2}$

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B = $\sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$

<u>Giải:</u>

Ta có B = $\sqrt{(2x^2 - x - 1)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$

Suy ra minB = 3 khi $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow$ x =1 hoặc x = $-\frac{1}{2}$

Vậy minB =3 khi x =1 hoặc x = $-\frac{1}{2}$

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

a) A = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2014

b) B = $\sqrt{(x+7)(x+5)(x+6)(x+8)+1954}$

6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

a) A = 1890 – (x+3)(x+6)(x+9)(x+12)

b) B = $\sqrt{1969-(x+2)(x+9)(x+5)(x+6)+1911}$

**B/ <u>Phương pháp 2:</u>**

| |
|---|
| **Áp dụng tính chất : \| x\| + \| y \| ≥ \| x + y \| . Để tìm GTNN của biểu thức . Dấu “=“ xảy ra khi x.y ≥ 0** |

<u>Thí dụ:</u> Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) A = | 2x – 5 | + | 2x - 1 |

b) B = | x – 1| + | x – 2 | + | x – 3 |

c) C = | x - 1| + | x – 2 | + | x – 3 | + | x – 4 |

d) D = $\sqrt{25x^2-20x+4}+\sqrt{25x^2}$

e) E = $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$

<u>Giải:</u>

a) Ta có A = | 2x – 5 | + | 2x - 1 |

= | 2x – 5 | + | 1- 2x | ≥ | 2x – 5 + 1- 2x |= | -4 | = 4

Suy ra minA = 4 khi (2x – 5)(1 – 2x) ≥ 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

b) B = | x – 1| + | x – 2 | + | x – 3 |

Ta có | x – 1| + | x – 3 | = | x – 1| + | 3 – x | ≥ | x – 1 + 3 – x | = 2

Dấu “=“ xảy ra khi (x – 1)(3 – x) ≥ 0 $\Leftrightarrow 1 \le x \le 3$

| x – 2| nhỏ nhất khi x =2

Vậy min B = 2 khi x =2

c) C = | x - 1| + | x – 2 | + | x – 3 | + | x – 4 |

= | x - 1| + | x – 4 | + | x – 2 | + | x – 3 |

Ta có: | x - 1| + | x – 4 | ≥ | x -1 +4 – x | ≥ 3

Dấu “=“ xảy ra khi (x – 1)(4 – x) ≥ 0 $\Leftrightarrow 1 \le x \le 4$

Ta có: | x – 2 | + | x – 3 | ≥ | x -2 +3 – x | ≥ 1

Dấu “=“ xảy ra khi (x – 2)(3 – x) ≥ 0 $\Leftrightarrow 2 \le x \le 3$

Vậy minC = 3 + 1 = 4 khi $2 \le x \le 3$

d)Ta có D = $\sqrt{(5x-2)^2} + \sqrt{25x^2}$

= | 5x – 2 | + |5x | ≥ |2 - 5x +5 x | = 2

Dấu “=“ xảy ra khi (2- 5x)5x ≥ 0 $\Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{2}{5}$

Vậy minD = 2 khi $0 \le x \le \frac{2}{5}$

e) Ta có E = $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$

= | x – 1| + | x – 2 | + | x – 3 |

Vậy minE = 2 khi x =2 ( làm như câu b )

Bài tập:

Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a) A = | x – 1 | + | x – 2 | + … + | x – 2006 |

b) B = $\sqrt{1-6x+9x^2} + \sqrt{9x^2-12x+4}$

Giải:

| |
|---|
| **Chú ý 1: y = \| x – a \| + \| x – b \|** **( a < b )** <br> **Min y = b – a khi** $a \le x \le b$ |

a) Ta có A = ( | x – 1 | + | x – 2006 | ) + ( | x – 2 | + |x – 2005 | ) + … + ( | x – 1002| + | x -1003 | )

Suy ra minA = 2005 + 2003 + … + 1 khi $1003 \le x \le 1004$

Vậy minA = $1003^2$ khi $1003 \le x \le 1004$

b) Ta có

B = $\sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{(3x-2)^2}$

= | 3x – 1 | + | 3x – 2 | = | 3x – 1 | + | 2 - 3x | ≥ | 3x – 1 + 2 – 3x | = 1

Vậy minB = 1 khi (3x – 1)(2 – 3x) ≥ 0 ⇔ $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$

| |
|---|
| **<u>Chú ý 2 :</u>** **y = \| ax – b \| + \| ax – c \|** **( b < c )** <br> **Min y = c – b khi** $\frac{b}{a} \le x \le \frac{c}{a}$ |

<u>Thí dụ</u>: Tìm GTNN của biểu thức

C = | 2x -5 | + | 2x – 7 |

Suy ra min C = 7 -5 = 2 khi $\frac{5}{2} \le x \le \frac{7}{2}$

| |
|---|
| **<u>Chú ý 3 :</u>** **y = \| ax + b \| + \| ax + c \|** **( b < c )** <br> **Min y = c – b khi** $-\frac{c}{a} \le x \le -\frac{b}{a}$ |

<u>Thí dụ</u> : Tìm GTNN của biểu thức

D = | 3x + 5 | + | 3x + 7 |

Suy ra min D = 7 - 5 =2 khi $-\frac{7}{3} \le x \le -\frac{5}{3}$

<u>Bài tập:</u>

1.Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) A = $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + ... + \sqrt{(x-2014)^2}$

b) B = $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + ... + \sqrt{(x-2015)^2}$

2. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) C = $\sqrt{4x^2-4x+1} + \sqrt{4x^2-12x+9}$

b) D = $\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2-8x+4}+\sqrt{4x^2-12x+9}$

c) E = $\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2-8x+4}+\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{4x^2-16x+16}$

3. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) F = | 2x - 1 | + | 2x – 2 | + … + | 2x – 2013 |

b) G = | 2x - 1 | + | 2x – 2 | + … + | 2x – 2014 |

c) H = | 2x + 1 | + | 2x + 2 | + … + | 2x + 2013 |

d) I = | 2x + 1 | + | 2x + 2 | + … + | 2x + 2014 |

e) K = $\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2x-2)^2}+...+\sqrt{(2x-2014)^2}$

f) L = $\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2x-2)^2}+...+\sqrt{(2x-2015)^2}$

g) M = $\sqrt{(2x+1)^2}+\sqrt{(2x+2)^2}+...+\sqrt{(2x+2014)^2}$

h) N = $\sqrt{(2x+1)^2}+\sqrt{(2x+2)^2}+...+\sqrt{(2x+2015)^2}$

i) O = $\sqrt{(4x+5)^2}+\sqrt{(4x+6)^2}+\sqrt{(4x+7)^2}$

k) P = $\sqrt{(4x+5)^2}+\sqrt{(4x+6)^2}+\sqrt{(4x+7)^2}+\sqrt{(4x+8)^2}$

l) Q = $\sqrt{(4x+1945)^2}+\sqrt{(4x+1946)^2}+...+\sqrt{(4x+2014)^2}$

m) X = $\sqrt{(4x+1975)^2}+\sqrt{(4x+1976)^2}+...+\sqrt{(4x+2015)^2}$

## C/ Phương pháp3:

**Áp dụng tính chất : | x | - | y | ≤ | x – y | để tìm GTLN**

**Dấu "=" xảy ra khi x ≥ y ≥ 0 hoặc x ≤ y ≤ 0**

**Thí dụ:** Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) A = | 3x + 5 | - | 3x + 7 | b) B = | 5x + 7| - | 5x – 2 |

c) C = | 4x$^2$ - 1975 | - | -4x$^2$ + 2025 |

Giải:

a) Ta có A = | 3x + 5 | - | 3x + 7 | ≤ | (3x + 5) - (3x + 7) | = 2

**Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow 3x+5\le 3x+7\le 0 \Leftrightarrow x\le \frac{-7}{3}$

Vậy maxA = 2 $\Leftrightarrow x \le \frac{-7}{3}$

b) Ta có B = | 5x + 7| - | 5x – 2 | ≤| (5x + 7) - (5x – 2) | = 9

**Dấu “=“ xảy ra** $\Leftrightarrow 5x+7 \ge 5x-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{2}{5}$

Vậy maxB = 9 $\Leftrightarrow x \ge \frac{2}{5}$

c) Ta có C = $|4x^2 - 1975| - |-4x^2 + 2025| = |4x^2 - 1975| - |4x^2 - 2025|$

$$\le |(4x^2-1975)-(4x^2-2025)| = 50$$

**Dấu “=“ xảy ra** $\Leftrightarrow 4x^2-1975 \ge 4x^2-2025 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{-45}{2} \\ x \ge \frac{45}{2} \end{array}\right.$

**Vậy maxC = 50** $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{-45}{2} \\ x \ge \frac{45}{2} \end{array}\right.$

**<u>Bài tập:</u>** Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) D = $\sqrt{(19x+5)^2} - \sqrt{(19x-8)^2}$

b) E = $|19x^5+1890| - |19x^5+2015|$

**D/ <u>Phương pháp4:</u>**

| |
|---|
| **Áp dụng bất đẳng thức:** $\sqrt{a}-\sqrt{b} \le \sqrt{a-b}$ **(a ≥ b ≥0 ) để tìm GTLN.**<br>**Dấu “=“ xảy ra khi b(a-b) = 0** $\Leftrightarrow$ **b = 0 hoặc a = b** |

**<u>Thí dụ:</u>** Tìm GTLN của biểu thức

A = $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$

<u>Giải:</u>

Ta có A = $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-8} \le \sqrt{(x+1)-(x-8)} = \sqrt{9} = 3$

Dấu “=“ xảy ra khi x - 8 = 0 $\Leftrightarrow$ **x = 8**

Suy ra maxA = 3 khi x = 8

**Bài tập:**

Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) B = $\sqrt{12x+2014}-\sqrt{12x-2015}$

b) C = $\sqrt{30x^4+1975}-\sqrt{30x^4-2015}$

**E/ Phương pháp5:**

**Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$ (a , b ≥0 ) để tìm GTNN**

**Dấu “=” xảy ra khi a.b = 0 $\Leftrightarrow$ a = 0 hoặc b = 0**

**Thí dụ:** Tìm GTNN của biểu thức A = $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$

**Giải:**

ĐKXĐ: $3\leq x\leq 5$

Ta có A = $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\geq\sqrt{(x-3)+(5-x)}=\sqrt{2}$

Dấu “=“ xảy ra khi x =3 hoặc x =5

Suy ra minA = $\sqrt{2}$ khi x =3 hoặc x =5

**Bài tập:**

1.Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) B = $\sqrt{20x-11}+\sqrt{1982-20x}$

b) C = $\sqrt{19x^5-1890}+\sqrt{-19x^5+2015}$

2. Cho x + y = 15 . Tìm GTNN của biểu thức D = $\sqrt{x-4}+\sqrt{y-3}$

**F/ Phương pháp 6:**

Áp dụng bất đẳng thức CôSi:

+ Với a ≥ 0, b ≥ 0 thì a + b ≥ 2 $\sqrt{ab}$ (1)

Dấu “=” xảy ra khi a = b

+ Với $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \geq 0$ thì $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ (2)

Dấu “=” xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots.. = a_n$

***Từ đẳng thức (1) ta suy ra:***

- Nếu a.b =k ( không đổi) thì min (a +b) = $2\sqrt{k}$ $\Leftrightarrow$ a = b

- Nếu a +b = k (không đổi ) thì max( a.b) = $\frac{k^2}{4}$ $\Leftrightarrow$ a = b

***Từ đẳng thức (2) ta suy ra:***

- Nếu $a_1.a_2.a_3 \ldots. a_n = k$ (không đổi ) thì min$(a_1+ a_2 + a_3 + \ldots.+ a_n) = n\sqrt[n]{k}$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \ldots.. = a_n$

- Nếu $a_1+ a_2 + a_3 +\ldots+ a_n = k$ (không đổi ) thì max$(a_1.a_2.a_3 \ldots. a_n) = \left(\frac{k}{n}\right)^n$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \ldots.. = a_n$

**<u>Dạng 1:</u> Tìm GTLN của biểu thức có dạng A = $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$ bậc f(x) bằng bậc g(x)**

***<u>Phương pháp giải</u>*: Ta tìm GTLN bình phương biêu thức đó. Sau đó áp dụng BĐT Côsi** $2\sqrt{ab} \le a+b$

**<u>Thí dụ:</u>** Tìm GTLN của biểu thức A = $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$

<u>Giải:</u>

ĐKXĐ: $\frac{5}{3} \le x \le \frac{7}{3}$

Ta có $A^2 = (3x-5)+(7-3x)+2\sqrt{(3x-5)(7-3x)}$

$\Leftrightarrow \quad A^2 \le 2+(3x-5)+(7-3x) = 4$

Dấu “=“ xảy ra khi $3x-5 = 7-3x \Leftrightarrow x = 2$

Vậy max$A^2$ = 4 khi x = 2

Do đó maxA = 2 khi x = 2

**<u>Bài tập:</u>**

1.Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) B = $\sqrt{x-5} + \sqrt{23-x}$

b) C = $\sqrt{7x^5 - 1954} + \sqrt{-7x^5 + 2014}$

2. Cho x + y = 15 . Tìm GTLN của biểu thức D = $\sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$

**<u>Chú ý</u>**: Tìm GTLN của biểu thức M = $\sqrt{ax^n \pm b} + \sqrt{c - ax^n}$ (b < c )

Max $A^2 = 2(c \pm b)$ khi $x^n = \frac{c \mp b}{2a}$

Suy ra maxA = $\sqrt{2(c \pm b)}$ khi $x^n = \frac{c \mp b}{2a}$

**<u>Dạng 2:</u> Tìm GTLN của biểu thức có dạng A = $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$ bậc f(x) bằng bậc g(x).**

**<u>Phương pháp giải:</u> Nhân và chia f(x) với cùng một số khác 0 , sau đó áp dụng BĐT Côsi $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$**

**<u>Thí dụ:</u>** Tìm GTLN của biểu thức A = $\frac{\sqrt{x-9}}{5x}$

<u>Giải:</u>

ĐKXĐ: $x \ge 9$

Ta có A = $\frac{\sqrt{x-9}}{5x} = \frac{\sqrt{\frac{x-9}{3}.3}}{5x} \le \frac{\frac{1}{2}(\frac{x-9}{3}+3)}{5x} = \frac{\frac{x-9+9}{3}}{10x} = \frac{1}{30}$

Dấu “=“ xảy ra khi $\frac{x-9}{3} = 3 \Leftrightarrow x = 18$

Vậy maxA = $\frac{1}{30}$ khi x = 18

**<u>Bài tập:</u>**

Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) B = $\frac{\sqrt{x-16}}{7x}$ b) C = $\frac{\sqrt{3x-25}}{7x}$ e) F = $\frac{\sqrt{2x-5}}{3x}$

c) D = $\frac{\sqrt{10x-49}}{2006x}$ d) E = $\frac{\sqrt{2x^2-25}}{2006x^2}$

*<u>Hướng dẫn</u>*: a) Nhân và chia biểu thức x – 16 cho cùng một số 4 ($\sqrt{16}=4$)

b) Nhân và chia biểu thức 3x – 25 cho cùng một số 5 ($\sqrt{25}=5$)

c) Nhân và chia biểu thức 10x – 49 cho cùng một số 7 ($\sqrt{49}=7$)

d) Nhân và chia biểu thức $2x^2$ – 25 cho cùng một số 5 ($\sqrt{25}=5$)

e) Nhân và chia biểu thức 2x – 5 cho cùng một số $\sqrt{5}$

***<u>Chú ý</u>*: Tìm GTLN của biểu thức N =** $\frac{\sqrt{ax^n-b}}{cx^n}$

**Suy ra MaxN =** $\frac{a}{2c\sqrt{b}}$ **khi** $x^n$ **=** $\frac{2b}{a}$

**<u>Dạng 3:</u> Tìm GTNN của biểu thức có dạng A =** $\frac{f(x)}{g(x)}$ **bậc của f(x) lớn hơn bậc của g(x).**

***<u>Phương pháp giải:</u>*** Biến đổi biểu thức đã cho thành một tổng của các biểu thức sao cho tích của chúng là một hằng số ( Tách một hạng tử thành tổng của nhiều hạng tử bằng nhau) , rồi áp dụng BĐT Côsi

**<u>Thí dụ :</u>** Cho x > 0 , tìm GTNN của biểu thức M = $\frac{(x+1994)^2}{x}$

<u>Giải:</u>

Ta có

$$M=\frac{x^2+2.1994x+1994^2}{x}=x+\frac{1994^2}{x}+2.1994\geq 2\sqrt{x.\frac{1994^2}{x}}+2.1994=2.1994+2.1994$$

$$=4.1994$$

Dấu “=“ xảy ra khi $x=\frac{1994^2}{x}\Leftrightarrow x=1994$

Vậy minM = 4.1994 khi x = 1994

**<u>Bài tập:</u>**

1. Cho x > 0 , tìm GTNN của các biểu thức

a) A = $\frac{3x^4+16}{x^3}$ b) B = $\frac{7x^8+256}{x^7}$ c) C = $\frac{2x^2-6x+5}{2x}$

<u>Giải:</u>

a) Ta có A = $3x+\frac{16}{x^3}=x+x+x+\frac{16}{x^3}\geq 4\sqrt[4]{x.x.x.\frac{16}{x^3}}=8$

Dấu “=“ xảy ra khi $x=\frac{16}{x^3}\Leftrightarrow x=2$

Vậy minA = 8 khi x = 2

b) Ta có

B = $7x+\frac{256}{x^7}=x+x+x+x+x+x+x+\frac{256}{x^7}\geq 8\sqrt[8]{x.x.x.x.x.x.x.\frac{256}{x^7}}=8.2=16$

Dấu “=“ xảy ra khi $x=\frac{256}{x}\Leftrightarrow x=2$

Vậy minB = 16 khi x = 2

c) Ta có C = $x-3+\frac{5}{2x}=x+\frac{5}{2x}-3\geq 2\sqrt{x.\frac{5}{2x}}-3=2\sqrt{\frac{5}{2}}-3=\sqrt{10}-3$

Dấu “=“ xảy ra khi $x=\frac{5}{2x}\Leftrightarrow 2x^2=5\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Vậy minC = $\sqrt{10}-3\quad\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\sqrt{10}$

2. Cho a, b, x > 0 . Tìm GTNN của biểu thức D = $\frac{(x+a)(x+b)}{x}$

Giải:

Ta có

D = $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x} = x+\frac{ab}{x}+a+b \geq 2\sqrt{x.\frac{ab}{x}}+a+b = 2\sqrt{ab}+a+b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

Dấu “=“ xảy ra khi $x=\frac{ab}{x} \Leftrightarrow x=\sqrt{ab}$

Vậy minD = $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ khi $x=\sqrt{ab}$

3. Cho $x \geq 0$, tìm GTNN của biểu thức

a) E = $\frac{x^2+2x+17}{2(x+1)}$ b) F = $\frac{x+6\sqrt{x}+34}{\sqrt{x}+3}$

Giải:

a) Ta có

E = $\frac{x^2+2x+1+16}{2(x+1)} = \frac{(x+1)^2+16}{2(x+1)} = \frac{x+1}{2}+\frac{8}{x+1} \geq 2\sqrt{\frac{x+1}{2}.\frac{8}{x+1}} = 2.2 = 4$

Dấu “=“ xảy ra khi $\frac{x+1}{2}=\frac{8}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=4 \\ x+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$

x = - 5 < 0 (loại)

Vậy minE = 4 khi x =3

b) Ta có

F = $\frac{x+6\sqrt{x}+9+25}{\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x}+3)^2+25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3+\frac{25}{\sqrt{x}+3} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3)\frac{25}{\sqrt{x}+3}} = 10$

Dấu “=“ xảy ra khi $\sqrt{x}+3=\frac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+3=5 \\ \sqrt{x}+3=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=-8 \end{array}\right.$

$\sqrt{x}=-8<0$ (loại ) . Do đó x =4

Vậy minF = 10 khi x = 4

4. Cho x > 0. Tìm GTNN của biểu thức G = $\frac{x^3+2000}{x}$

Giải:

Ta có G = $x^2+\frac{2000}{x}=x^2+\frac{1000}{x}+\frac{1000}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\frac{1000}{x}.\frac{1000}{x}}=3.100=300$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2=\frac{1000}{x}\Leftrightarrow x^3=1000\Leftrightarrow x=10$

Vậy minG = 300 khi x = 10

5. Cho x > y . Tìm GTNN của các biểu thức sau

a) H = $\frac{x^2+1,2x+y^2}{x-y}$, biết x.y = 5 b) I = $\frac{x^2+y^2}{x-y}$, biết x.y = 2

Giải:

a) Ta có

H = $\frac{(x-y)^2+3,2xy}{x-y}=x-y+\frac{3,2xy}{x-y}=x-y+\frac{16}{x-y}\geq 2\sqrt{(x-y).\frac{16}{x-y}}=8$

Dấu "=" xảy ra khi $x-y=\frac{16}{x-y}\Leftrightarrow x-y=4$ .

Kết hợp với điều kiện x.y =5 ta suy ra được x =5, y =1 hoặc x =-1 , y = -5

Vậy minH = 8 $\Leftrightarrow$ x =5, y =1 hoặc x =-1 , y = -5

b) Ta có I = $\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}=x-y+\frac{2xy}{x-y}=x-y+\frac{4}{x-y}\geq 2\sqrt{(x-y).\frac{4}{x-y}}=4$

Dấu "=" xảy ra khi $x-y=\frac{4}{x-y}\Leftrightarrow x-y=2$

Kết hợp với điều kiện x.y =2 ta suy ra được $x=1+\sqrt{3}, y=-1+\sqrt{3}$ hoặc $x=1-\sqrt{3}, y=-1-\sqrt{3}$

Vậy minI = 4 $\Leftrightarrow$ $x=1+\sqrt{3}, y=-1+\sqrt{3}$ hoặc $x=1-\sqrt{3}, y=-1-\sqrt{3}$

6. Cho x >0 .Tìm GTNN của các biểu thức sau

a) K = $\frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$ b) P = $\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$

Giải:

a) Ta có K = $\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}-1\geq 2.\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}}-1=1$

Dấu “=“ xảy ra khi $\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$

Vậy minK = 1 khi x = 1

b)Ta có

P=$\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{9}{\sqrt{x}+1}}-2=4$

Dấu “=“ xảy ra khi $\sqrt{x}+1=\frac{9}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow x=4$

Vậy minQ = 4 khi x = 4

7. Cho x > 9 .Tìm GTNN của các biểu thức sau Q = $\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$

Giải:

Ta có

$$Q=\frac{4x}{\sqrt{x}-3}=\frac{4x-36+36}{\sqrt{x}-3}=\frac{4(x-9)+36}{\sqrt{x}-3}=4(\sqrt{x}+3)+\frac{36}{\sqrt{x}-3}=4\sqrt{x}+12+\frac{36}{\sqrt{x}-3}$$

$$=4\sqrt{x}-12+\frac{36}{\sqrt{x}-3}+12+12$$

$$=4(\sqrt{x}-3)+\frac{36}{\sqrt{x}-3}+24\geq 2\sqrt{4(\sqrt{x}-3)\frac{36}{\sqrt{x}-3}}+24=48$$

Dấu “=“ xảy ra khi $4(\sqrt{x}-3)=\frac{36}{\sqrt{x}-3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-3=3\\ \sqrt{x}-3=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=36\\ x=0\end{array}\right.$

Kết hợp ĐK x > 9 nên x = 0 ( loại )

Vậy minQ =48 khi x =36

8. Tìm GTLN của biểu thức L = $\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

Giải:

Ta qui về tìm GTNN của biểu thức $\frac{1}{L}=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$

Dấu “=“ xảy ra khi $\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=1$

Vậy Min$\frac{1}{L}=1\Leftrightarrow x=1$

Do đó maxL =1 khi x = 1

9. Tìm giá GTLN của biểu thức y $=\frac{x}{(x+1982)^2}$

Giải:

Ta qui về tìm GTNN của biểu thức $\frac{1}{y}=\frac{(x+1982)^2}{x}$

Ta có $\frac{1}{y}=\frac{x^2+1982^2+2.1982x}{x}=x+\frac{1982^2}{x}+2.1982\geq 2\sqrt{x.\frac{1982^2}{x}}+2.1982=4.1982$

Dấu “=“ xảy ra khi $x=\frac{1982^2}{x}\Leftrightarrow x=1982$

Vậy min $\frac{1}{y}=4.1982$ khi x = 1982

Do đó max y = $\frac{1}{4.1982}$ khi x = 1982

**Dạng 4:** Tìm GTLN của biểu thức có dạng : A = f(x).g(x) , *bậc f(x) bằng bậc g(x)*

***Phương pháp giải:*** - Biến đổi f(x) + g(x) = k ( k là hằng số )

- Áp dụng BĐT Côsi: $a.b \le \frac{(a+b)^2}{4}$

Dấu “=“ xảy ra khi a = b

**Thí dụ 1 :** Tìm GTLN của biểu thức $A = x^3(16 - x^3)$

Giải:

Ta có $A = x^3(16 - x^3) \le \frac{\left[x^3 + (16 - x^3)\right]^2}{4} = \frac{16^2}{4} = 64$

Dấu “=“ xảy ra khi $x^3 = 16 - x^3 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy maxA = 64 khi x = 2

**Thí dụ 2 :** Tìm GTLN của biểu thức B = (1 –x )(2x – 1) với $\frac{1}{2} \le x \le 1$

Giải:

Ta có $B = (1-x)(2x-1) = \frac{1}{2}(2 - 2x)(2x - 1) \le \frac{1}{2}.\frac{(2 - 2x + 2x - 1)^2}{4} = \frac{1}{8}.1 = \frac{1}{8}$

Dấu “=“ xảy ra khi $2 - 2x = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

Vậy maxB = $\frac{1}{8}$ khi x = $\frac{3}{4}$

**Bài tập:** Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) $C = (2x^2 - 1)(2 - x^2)$ b) $D = (3x + 5)(2 - x)$

**Dạng 5**: Tìm GTNN của biểu thức có dạng: A = f(x) + g(x)

**Phương pháp giải:** Biến đổi biểu thức đã cho thành một tổng của các biểu thức sao cho tích của chúng là một hằng số

( tách một hạng tử chứa biến thành tổng của một hằng số với một hạng tử này là nghịch đảo của một hạng tử khác có trong biểu thức đã cho , có thể sai khác một hằng số )

**<u>Thí dụ</u>:** Cho 0 < x < 12 . Tìm GTNN của biểu thức A = $\frac{9x}{2-x}+\frac{2}{x}$

<u>Giải:</u>

Ta có A = $\frac{9x}{2-x}+\frac{2}{x}=\frac{9x}{2-x}+\frac{2-x}{x}+1\geq 2\sqrt{\frac{9x}{2-x}.\frac{2-x}{x}}+1=2.3+1=7$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{9x}{2-x}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy minA = 7 khi $x=\frac{1}{2}$

**<u>Bài tập:</u>**

1. Cho x > 1 , tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) B = $x+\frac{1}{x-1}$ b) C = $4x+\frac{25}{x-1}$

<u>Giải:</u>

a) Ta có B = $x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1).\frac{1}{x-1}}+1=3$

Dấu "=" xảy ra khi $x-1=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=1\Leftrightarrow |x-1|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

Vì x > 1 nên x =0 (loại)

Vậy minB = 3 khi x =2

b) Ta có

C = $4x+\frac{25}{x-1}=4(x-1)+\frac{25}{x-1}+4\geq 2\sqrt{4(x-1).\frac{25}{x-1}}+4=2\sqrt{100}+4=24$

Dấu "=" xảy ra khi $4(x-1)=\frac{25}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\frac{5}{2} \\ x-1=-\frac{5}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{2} \\ x=\frac{-3}{2} \end{array}\right.$

Vì x > 1 nên $x=\frac{-3}{2}$ (loại)

Vậy minC = 24 khi $x=\frac{7}{2}$

2. Cho x, y > 0 và x + y > 6. Tìm GTNN của biểu thức D = $5x+3y+\frac{12}{x}+\frac{16}{y}$

<u>Giải:</u>

Ta có

D = $2(x+y)+(3x+\frac{12}{x})+(y+\frac{16}{y})\geq 2.6+2\sqrt{3x.\frac{12}{x}}+2\sqrt{y.\frac{16}{y}}=12+12+8=32$

Dấu “=“ xảy ra khi $3x=\frac{12}{x}$ và $y=\frac{16}{y}\Leftrightarrow$ x = 2 và y = 4

Vậy minD = 32 $\Leftrightarrow$ x = 2 và y = 4

3. Cho x, y, z $\geq 0$ thỏa mãn điều kiện: x + y + z = 2007

a) Tìm GTLN của biểu thức E = xy + yz + zx.

b) Tìm GTNN của biểu thức F = $x^2 + y^2 + z^2$

<u>Giải:</u>

Áp dụng BĐT Côsi : $a^2 + b^2 \geq 2ab$

a) Ta có $x.y\leq\frac{x^2+y^2}{2}$

$y.z\leq\frac{y^2+z^2}{2}$

$z.x\leq\frac{z^2+x^2}{2}$

$\Rightarrow xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx\leq (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\leq (x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow 3E\leq 2007^2$

$\Leftrightarrow E\leq\frac{2007^2}{3}=1342683$

Dấu “=“ xảy ra khi $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2007}{3}=669$

Vậy maxE = 1342683 khi x = y = z = 669

b)Ta có F = $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$$=2007^2-2(xy+yz+zx)$$

F min $\Leftrightarrow (xy+yz+zx)$ max $\Leftrightarrow (xy+yz+zx)=1342683$ (theo câu a )

Khi đó minF = $2007^2-\frac{2.2007^2}{3}=\frac{2007^2}{3}$ khi $x=y=z=\frac{2007}{3}=669$

**4.** Cho x, y, z $\geq 0$ thỏa mãn điều kiện: x + y + z = a ( a là hằng số dương)

a) Tìm GTLN của biểu thức E = xy + yz + zx.

b) Tìm GTNN của biểu thức F = $x^2+y^2+z^2$

**G/ <u>Phương pháp7:</u>**

**Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$) Dấu “=“ xảy ra khi phương trình có nghiệm kép $x=-\frac{b}{2a}$ ($x=-\frac{b'}{a}$). Để tìm GTNN, GTLN của biểu thức**

**<u>Thí dụ :</u>** Tìm GTNN của biểu thức A = $5x^2 - 4x + 1$

**<u>Giải:</u>**

Gọi a là một giá trị của biểu thức A . Biểu thức A nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình $5x^2 - 4x + 1 = a$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 5x^2 - 4x + 1 - a = 0$ (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 5a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{5}$

Vậy minA = $\frac{1}{5}$ $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm kép x = $\frac{2}{5}$

**<u>Bài tập:</u>**

1. Tìm GTNN của biểu thức B = $\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$

**<u>Giải:</u>**

ĐKXĐ: x $\neq 1$

Gọi a là một giá trị của B , phương trình $\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}=a$ (1) phải có nghiệm

PT (1) $\Leftrightarrow (a-1)x^2-(2a-1)x+(a-1)=0$ (2)

- Nếu a = 1 thì x =0
- Nếu a $\neq$ 1 thì (2) là phương trình bậc hai

$\Delta=(2a-1)^2-4(a-1)^2=4a-3$

PT (2) có nghiệm $4a-3\geq 0 \Leftrightarrow a\geq\frac{3}{4}$

Vậy minB = $\frac{3}{4}$ khi PT (2) có nghiệm kép x = -1

2. Tìm GTNN của biểu thức P = $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

**Giải:**

ĐKXĐ: x $\in$ R

Gọi a là một giá trị của P, phương trình $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=a$ (1) phải có nghiệm

PT (1) $\Leftrightarrow (1-a)x^2-(1+a)x+1-a=0$ (2)

- Nếu a = 1 thì x =0
- Nếu a $\neq$ 1 thì (2) là phương trình bậc hai

$\Delta=(1+a)^2-4(1-a)^2=-3a^2+10a-3$

PT (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=-3a^2+10a-3\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq a\leq 3$

Vậy minP = $\frac{1}{3}$ khi PT (2) có nghiệm kép x = 1

3.Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau:

a) Q = $\frac{4x-3}{x^2+1}$ b) K = $\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+3}$

**Giải:**

a) ĐKXĐ: x $\in$ R

Gọi a là một giá trị của Q , phương trình $\frac{4x-3}{x^2+1}=a$ (1) phải có nghiệm

PT (1) $\Leftrightarrow ax^2-4x+a+3=0$ (2)

- Nếu a = 0 thì PT (2) là -4x = -3 có nghiệm x = $\frac{3}{4}$
- Nếu a $\neq$ 0 thì (2) là phương trình bậc hai

$\Delta' = 4-a(a+3) = -a^2-3a+4$

PT (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -a^2-3a+4 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 1$

Vậy: minQ = -4 khi PT (2) có nghiệm kép x = $\frac{-1}{2}$

maxQ = 1 khi PT (2) có nghiệm kép x = 2

b) ĐKXĐ: x $\in$ R

Gọi a là một giá trị của K , phương trình $\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+3}=a$ (1) phải có nghiệm

PT (1) $\Leftrightarrow (a-1)x^2-2(a+1)x+(3a+1)=0$ (2)

- Nếu a = 1 thì PT (2) là -4x = -4 có nghiệm x = 1
- Nếu a $\neq$ 1 thì (2) là phương trình bậc hai

$\Delta' = (a+1)^2-(a-1)(3a+1) = -2a^2+4a+2$

PT (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -2a^2+4a+2 \geq 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \leq a \leq 1+\sqrt{2}$

Vậy: minK = $1-\sqrt{2}$ khi PT (2) có nghiệm kép x = $1-\sqrt{2}$

maxK = $1+\sqrt{2}$ khi PT (2) có nghiệm kép x =$1+\sqrt{2}$

4. Tìm cặp số (x,y) thỏa mãn phương trình : $3x^2 - 6x + y - 2 = 0$ (1) sao cho y đạt giá trị lớn nhất.

<u>Giải:</u>

Xét phương trình bậc hai , ẩn x tham số y.

Nếu tồn tại cặp số (x,y) thỏa mãn phương trình (1) thì PT (1) phải có nghiệm.

Do đó $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9-3(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 5$

Vậy max y = 5 khi PT(1) có nghiệm kép x =1

Nên cặp số cần tìm là (1;5)

5. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) E = $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ b) F = $\frac{(x+2014)^2}{x}$

6. Tìm GTLN của biểu thức G = $\frac{x}{(x+2000)^2}$

## HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**+ Kết quả: Dạy bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán các cấp:**

| Năm học | Cấp huyện | Cấp tỉnh |
|---|---|---|
| **2011-2012** | - *Lớp 8*: Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 4 giải Nhì, 1giải Ba) | *Lớp 9*: Đạt 18/20 (1 giải Nhất, 5 giải Nhì, 6 giải Ba, 6 giải KK). |
| **2012-2013** | - *Lớp 9*: Đạt 6/7 (1 Nhất, 2 Nhì, 2 Ba, 1KK)<br>-*Lớp 8:* Đạt 4/7 (2 giải Nhì, 1giải Ba, 1giải KK). | *Lớp 9:* Đạt 11/20 (2 giải Nhì, 4 giải Ba, 5 giải KK). |
| **2013-2014** | -*Lớp 8*: Đạt 10/10 (2 giải Nhì, 4 giải Ba, 4 giải KK).<br>- *Lớp 9:* Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 1 giải Nhì, 2 giải Ba, 2 giải KK). | Đạt 17/20 (4 giải Nhì, 4 giải Ba, 9 giải KK). |
| **2014-2015** | -*Lớp 9:* Đạt 7/10 ( 2 giải Nhì, 3 giải Ba, 2 giải KK) | Đạt 11/20 (7 giải Ba, 4 giải KK). |
| **2015-2016** | -*Lớp 9:*Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 2 giải Nhì, 2 giải Ba, 1 giải KK) | -*Lớp 9:*Đạt 9/20 (3 giải Nhì, 4 giải Ba, 2 giải KK) |
| **2016-2017** | *Lớp 9:*Đạt 6/7 (2 giải Nhì, 3 giải Ba, 1 giải KK) | -*Lớp 9:*Đạt 11/20 (3 giải Nhì, 4 giải Ba, 2 giải KK) |
| **2017-2018** | *Lớp 9:*Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 3 giải Nhì, 1 giải Ba, 1 giải KK)<br>*Lớp 8:* Đạt 9/10 (2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 3 giải Ba, 1 giải KK) | -Lớp 9: Đạt 19/20 (2 giải Nhất, 5 giải Nhì, 7 giải Ba, 5 giải KK). |
| **2018-2019** | *Lớp 9:* Đạt 10/10 (2 giải Nhất, 4 giải Nhì, 4 giải Ba) | -Lớp 9: Đạt 18/20 (5 giải Nhì, 8 giải Ba, 5 giải KK). |

\+ Có 1 học sinh đậu vào lớp 10 trường chuyên Toán thuộc Đại học Quốc gia TPHCM, đậu thủ khoa trường THPT Mộ Đức số 2 và nhiều em vào trường chuyên Lê Khiết, nhiều em đạt điểm 10 môn Toán trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 và lớp chọn của trường THPT số 2 Mộ Đức.

\+ Sáng kiến này đã tham gia viết “Chuyên đề Toán học” dự thi kỷ niệm 50 năm thành lập tạp chí Toán học tuổi trẻ . Kết quả đạt giải KK vào tháng 12 năm 2014.

# KẾT LUẬN

*Trên đây là những phương pháp, những dạng bài tập mà qua quá trình giảng dạy, tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi, dạy học tự chọn mà bản thân tôi đã tổng hợp được. Thật ra đây là những bài toán mà ta có thể bắt gặp ở các sách, đề thi, ....*

*Việc phân chia các dạng bài tập trong tài liệu này chỉ có tính tương đối để cho dễ tìm. Trong mỗi bài toán , tuỳ theo cách nhìn mà ta sẽ có hướng giải tương ứng. Để học sinh có được cách giải tương ứng của mỗi bài toán thì phải dạy cho học sinh nắm thật chắc các kiến thức cơ bản, nắm được các phương pháp giải các dạng bài tập và thường xuyên rèn luyện kỹ năng giải bài tập cho học sinh.*

*Với suy nghĩ như vậy. Tôi tin tưởng mỗi chúng ta có thể làm cho học sinh không còn bỡ ngỡ và lúng túng khi gặp dạng toán như thế này. Vì khả năng và thời gian có hạn nên sáng kiến này xin tạm dừng tại đây.*

*Rất mong sự góp ý của các đồng chí, đồng nghiệp để sáng kiến này được phát huy và được mở rộng hơn nữa.*

*Đức Nhuận, ngày 20 tháng 3 năm 2019.*

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

*Tôi xin cam đoan đây là SK bản thân thực hiện, không sao chép nội dung của người khác, nếu vi phạm tôi xin chịu xử lý theo quy định./.*

NGƯỜI VIẾT

***Huỳnh Bá***

***Trần Ngọc Duy***

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Vũ Thanh (1997), *Toán nâng cao Đại số 8*, NXB Giáo dục

2. Nguyễn Vũ Thanh (1996), *Toán nâng cao Đại số 9* , NXB Đà Nẵng

3. Bùi Văn Tuyên (2005), *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 9*, NXB Giáo dục

4. Một số đề thi HSG các cấp và thi tuyển sinh vào lớp 10, …

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG KH CẤP TRƯỜNG

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

...............................................................................................

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học: ………....................................................

- Hiệu quả: ..........................................................................................................

- Xếp loại: ...........................................................................................................

Đức nhuận*, ngày ... tháng .... năm 2019.*

CT. HĐKH CẤP TRƯỜNG

***Huỳnh Bá***

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG …………………………

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

......................................................................................................................

……........................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

..........................................................

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học:………..................................................

- Hiệu quả: ......................................................................................................

- Xếp loại: ........................................................................................................

Mộ Đức*, ngày ... tháng .... năm 2019*

.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................
.................................................................................................................................................