# MỞ ĐẦU

Tất cả học sinh lớp 9 đều biết công thức tính diện tích của một tam giác nhưng để vận dụng công thức đó vào giải các bài toán khác là một vấn đề chúng ta cần quan tâm tìm hiểu, có những bài toán khó về diện tích khi học sinh gặp phải thì rất là bỡ ngỡ và lúng túng. Vì trong chương trình Toán THCS SGK chưa đề cập nhiều về các công thức tính diện tích tam giác. Do đó, nhiều học sinh chưa có được phương pháp giải những bài toán dạng như thế này, mà dạng toán này chúng ta đều thấy ở các đề thi học sinh giỏi, đề thi tuyển sinh vào lớp 10, ….

Vì thế trong quá trình dạy học (dạy học tự chọn, dạy BDHSG,…) . Chúng ta cần phải trang bị cho học sinh nắm được một số ứng dụng của công thức tính diện tích tam giác thường gặp nhất trong chương trình Toán THCS. Để từ đó, mỗi học sinh tự mình giải được các bài toán dạng này một cách chủ động và sáng tạo.

Đôi khi trong quá trình giải toán có những đẳng thức khá đẹp và nếu chúng ta chịu khó suy luận và tìm tòi khai thác nó sâu hơn, qua đó mà ta có thể hình thành được nhiều bài toán mới hoặc vận dụng để giải được nhiều bài toán khác.

Đứng trước thực trạng trên, với tinh thần yêu thích bộ môn, muốn được đóng góp phần nào để gỡ rối cho học sinh. Tôi xin đưa ra sáng kiến kinh nghiệm “ ***Hình thành hệ thống bài toán từ một công thức tính diện tích của tam giác và một đẳng thức” .*** Qua đó học sinh nắm được phương pháp học tập một cách có hiệu quả hơn**.**

TRẦN NGỌC DUY – GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

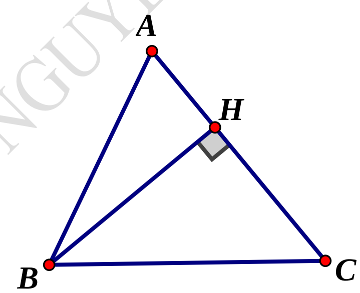
# NỘI DUNG

**Chúng ta cùng xuất phát từ một bài toán mở đầu sau**:

Cho tam giác nhọn ABC, biết AC = b, AB = c; $BAC = \alpha$ .

a) Tính diện tích tam giác ABC theo b, c và $\alpha$ .

b) Chứng minh $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$




***Lời giải.*** a) Kẻ đường cao BH nên BH = AB.sinA (1)

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.\text{AB.sinA}$

Hay $S_{ABC} = \frac{1}{2}\text{b.c.sin}\,\alpha$ .

b) Ta có HC = AC – AH mà AH = AB.cosA nên HC = AC - AB.cosA.(2)

Ta có tam giác BHC vuông tại H nên $BC^2 = BH^2 + HC^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $BC^2 = (AB.\sin A)^2 + (AC - AB.\cos A)^2$

$= (AB.\sin A)^2 + AC^2 – AC.AB.\cos A + (AB.\cos A)^2$

$= (AB.\sin A)^2 + (AB.\cos A)^2 + AC^2 – AC.AB.\cos A$

$= AB^2(\sin^2A + \cos^2B) + AC^2 – AC.AB.\cos A$

$= AB^2 + AC^2 – 2AC.AB.\cos A$

Hay $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (đpcm)

***Với kết quả bài toán này mà ta có thể ứng dụng vào giải các bài toán khác.***

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

***Bài toán 1.*** *(vận dụng bài toán mở đầu)*

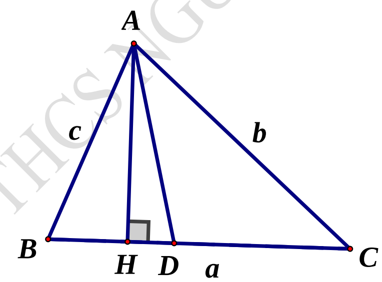
Cho tam giác nhọn ABC, biết BC = a, AC = b, AB = c. Gọi S, p, lần lượt là diện tích, nửa chu vi của tam giác ABC, phân giác AD.

Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

b) AD = $\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$ ; (với $sin2\alpha = 2\,sin\alpha.cos\alpha$)

c) S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$




***Lời giải.***

a) Áp dụng bài toán mở đầu, ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\text{bc.sinA} = \dfrac{1}{2}\text{ac.sinB} = \dfrac{1}{2}\text{ab.sinC}$ nên suy ra $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (đpcm)

b) Ta có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\text{sinA} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD.AC.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.\text{sinA} = AD.\sin\frac{A}{2}.(AB + AC)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = AD.\sin\frac{A}{2}.(AB + AC)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\cos\frac{A}{2} = AD(AB + AC)$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2AB.AC\cos\dfrac{A}{2}}{AB + AC}$$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

$\Leftrightarrow AD = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$ (đpcm)

c) ***Cách 1.*** Ta có $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Leftrightarrow S^2 = \dfrac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A \Leftrightarrow S^2 = \dfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)$

$\Leftrightarrow S^2 = \dfrac{1}{4}b^2c^2(1+\cos A)(1-\cos A)$ mà $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Nên $S^2 = \dfrac{1}{4}b^2c^2\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$

$= \dfrac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

$= \dfrac{(b+c+a)}{2}.\dfrac{(b+c-a)}{2}.\dfrac{(a+b-c)}{2}.\dfrac{(a+c-b)}{2}$

$= p.(p-a)(p-b)(p-c)$

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

***Cách 2.***

Ta có $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\dfrac{a+b+c}{2}.\dfrac{b+c-a}{2}.\dfrac{a+c-b}{2}.\dfrac{a+b-c}{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{b+c+a}{2}.\dfrac{b+c-a}{2}.\dfrac{a-(b-c)}{2}.\dfrac{a+b-c}{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4}.\dfrac{a^2-(b-c)^2}{4}}$

$= \sqrt{\dfrac{(b+c)^2-b^2-c^2+2bc.\cos A}{4}.\dfrac{b^2+c^2-2bc.\cos A-(b-c)^2}{4}}$

$= \sqrt{\dfrac{bc(1+\cos A)}{2}.\dfrac{bc(1-\cos A)}{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{b^2c^2(1-\cos^2 A)}{4}} = \sqrt{\dfrac{b^2c^2\sin^2 A}{4}} = \sqrt{S^2} = S$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

***Cách 3.*** *Kẻ đường cao AH*

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông, ta có:

$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC - CH)^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC^2 - 2BC.CH + CH^2) = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow CH = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2BC} = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$

$\Rightarrow CH^2 = \left(\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$

$\Rightarrow AH^2 = b^2 - \left(\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$

$$S_{ABC}^2 = \frac{AH^2.BC^2}{4} = \left[b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2\right].\frac{1}{4}.a^2$$

$$= \frac{\left[4a^2b^2 - (b^2 + a^2 - c^2)^2\right].a^2}{16a^2}$$

$$= \frac{(2ab + b^2 + a^2 - c^2)(2ab - b^2 - a^2 + c^2)}{16}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b)}{16}$$

$$= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{16}$$

$$= p(p - a)(p - b)(p - c)$$

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

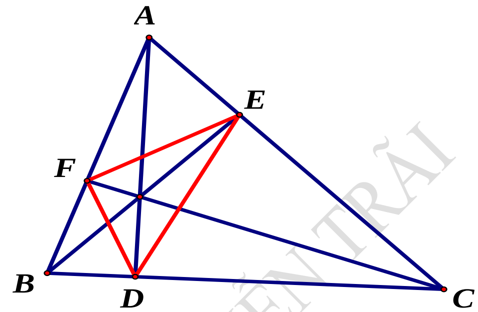
TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

***Bài toán 2.*** *(áp dụng bài toán mở đầu)*

Cho tam giác nhọn ABC, ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{S_{\text{AEF}}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$

b) $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$




***Lời giải.***

a) Ta có $\dfrac{S_{\text{AEF}}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}AE.\text{AF.sinA}}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A} = \dfrac{AE.\text{AF}}{AB.AC} = \dfrac{AE}{AB}.\dfrac{AF}{AC} = \cos\text{A}.\cos\text{A} = \cos^2 A$ (đpcm) (1)

b) Chứng minh tương tự câu a ta cũng có $\dfrac{S_{\text{BDF}}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$; $\dfrac{S_{\text{CDE}}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$ (2)

Ta có $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC} - S_{\text{AEF}} - S_{\text{BDF}} - S_{\text{CDE}}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{S_{\text{AEF}}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{\text{BDF}}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{\text{CDE}}}{S_{ABC}}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

hay $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$ (đpcm)

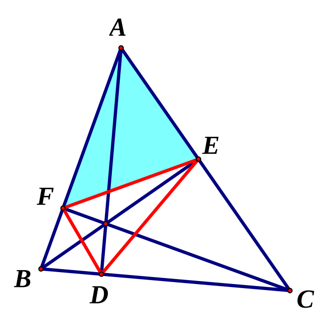
***Bài toán 3.*** (áp dụng bài toán 2)

Cho tam giác nhọn ABC có $S_{\Delta ABC} = 75{,}1954$ cm$^2$ và các đường cao AD, BE, CF. Xác định số đo góc A của $\Delta$ABC để $S_{\Delta\text{AEF}} = 30{,}41975$ cm$^2$

***Lời giải.***

Ta có $\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}} = \cos^2 A$

$\Leftrightarrow \cos A = \sqrt{\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}} \Rightarrow A = \cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}}\right) = 50^0 30' 11.1''$

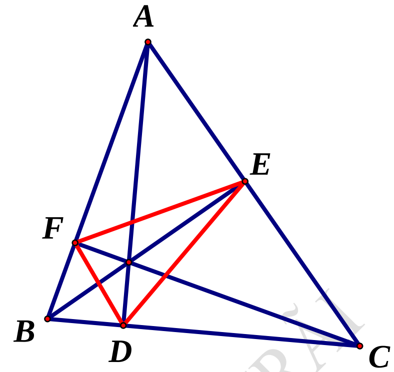



***Bài toán 4.*** (áp dụng bài toán 2)

Cho tam giác ABC có AB = 19,5cm, AC = 27,7cm $\widehat{BAC} = 55^0$ và các đường cao AD, BE, CF. Tính diện tích $\Delta$DEF

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

***Lời giải.***




Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A \approx 221{,}23$ ($cm^2$)

$BC^2 = AB^2 + AC^2 – 2AB.AC.\cos A$

nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A} \approx 22{,}976$ (cm)

Ta có $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \dfrac{AC.\sin A}{BC} \Rightarrow B = \sin^{-1}\left(\dfrac{AC.\sin A}{BC}\right) = 80^0 57'50,25"$

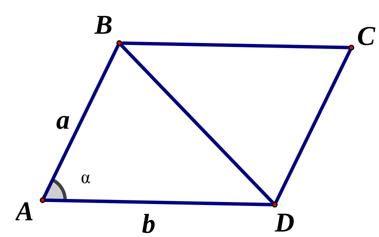
$\Rightarrow C = 44^0 2'9,75"$

Ta có $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

$\Rightarrow S_{DEF} = S_{ABC}(\sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \approx 28{,}654(cm^2)$

**Bài toán 5.** *(vận dụng bài toán mở đầu)*

Cho hình bình hành ABCD , biết AB = a, AD = b và $A = \alpha$ .




a) Tính diện tích hình bình hành ABCD theo a, b và $\alpha$

b) Chứng minh rằng : $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$

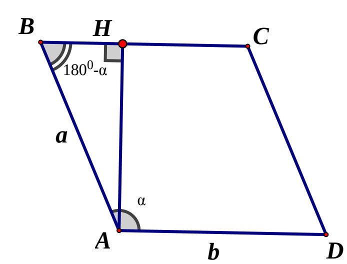
***Lời giải.***

a) – Nếu $\alpha < 90^0$, ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\dfrac{1}{2}a.b.\sin\alpha = ab\sin\alpha$

Nên $S_{ABCD} = ab\sin\alpha$ (1)

– Nếu $90^0 < \alpha < 180^0$, ta kẻ AH vuông góc với BC nên $S_{ABCD}$ = AH.BC

Mà tam giác AHB vuông tại H nên AH = AB.sinB.




Do đó $S_{ABCD}$ = AB.sinB.BC = $a.b.\sin(180^0 - \alpha)$ (2)

b)Từ (1) và (2) suy ra $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

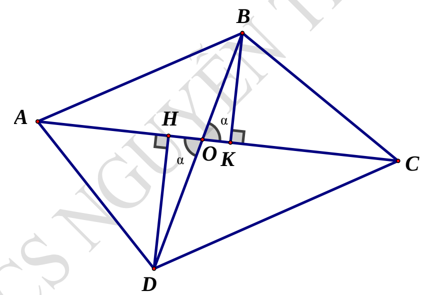
**Bài toán 6.** (áp dụng bài toán mở đầu)

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{AOB} = \alpha$ ; BD= m, AC = n.

a) Tính diện tích của tứ giác ABCD theo m, n và $\alpha$.

b) Áp dụng. Tính diện tích tứ giác ABCD với m = 26,31931 cm ; n = 30,41975 và $\alpha = 80^0 20' 11''$

***Lời giải.***




Kẻ BK và DH vuông góc với AC

Ta có $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

$$= \frac{1}{2}AC.BK + \frac{1}{2}AC.DH$$

$$= \frac{1}{2}AC(OB + OD).\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$$

Vậy: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}m.n.\sin\alpha$

b) $S_{ABCD} \approx 394{,}63308$ ($cm^2$)

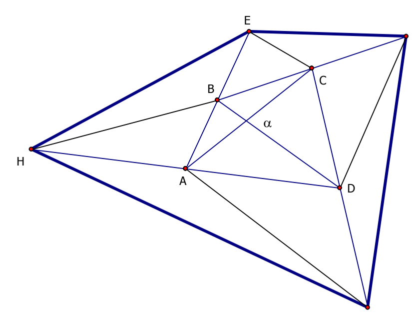
**Bài toán 7.** (*vận dụng bài toán 6*)

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tạo thành góc $\alpha$ và AC = a, BD = b. Trên tia đối của các tia BA, CB, DC, AD lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho BE = BA, CF = CB, DG = DC và AH = AD.

a) Lập công thức tính diện tích tứ giác EFGH theo a, b và $\alpha$.

b) Áp dụng: Tính góc $\alpha$, biết a = 25,081911(cm) ; b = 41,02013(cm) và $S_{EFGH}$ = 2488,325971 ($cm^2$)

***Lời giải.***




Ta có BA là đường trung tuyến của $\Delta HBD$ nên $S_{BAH} = S_{BAD}$

HB là đường trung tuyến của $\Delta AHE$ nên $S_{HBA} = S_{HBE}$

Do đó $S_{AHE} = 2S_{BAD} = 2S_{DAB}$

TRẦN NGỌC DUY GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

Chứng minh tương tự, ta có

$$S_{BEF} = 2S_{ABC}$$
$$S_{CFG} = 2S_{BCD}$$
$$S_{DGH} = 2S_{CDA}$$

Mà $S_{\text{EFGH}} = S_{AHE} + S_{\text{BEF}} + S_{CFG} + S_{\text{DGH}} + S_{ABCD}$

$$= (S_{AHE} + S_{CFG}) + (S_{\text{BEF}} + S_{\text{DGH}}) + S_{ABCD}$$
$$= 2(S_{DAB} + S_{BCD}) + 2(S_{ABC} + S_{\text{CDA}}) + S_{ABCD}$$
$$= 2S_{ABCD} + 2S_{ABCD} + S_{ABCD} = 5S_{ABCD}$$

Suy ra $S_{\text{EFGH}} = 5S_{ABCD}$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ (tứ giác có 2 đường chéo vuông góc)

Do đó $S_{\text{EFGH}} = \frac{5}{2}ab\sin\alpha$

b) Áp dụng: $S_{\text{EFGH}} = \frac{5}{2}ab\sin\alpha \Rightarrow \alpha = 75^0 19'54"$

***Bài toán 8**.(áp dụng kết quả bài toán 5)*

Cho hình bình hành ABCD có AB = a, BC = b và $B = \alpha$. Gọi R, S, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Vẽ AP cắt BQ, DS lần lượt tại H, M. Vẽ CR cắt BQ, DS lần lượt tại K, N.

a) Lập công thức tính diện tích tứ giác HKNM theo a, b và $\alpha$.
b) Áp dụng : Tính số đo các góc của hình bình hành ABCD, biết a = 22,121944 (cm), b = 30,041975 và diện tích tứ giác HKNM là 128,5765873 (cm$^2$)

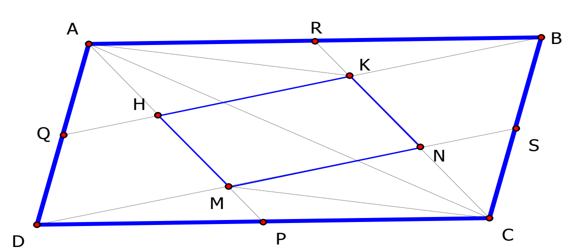
***Lời giải.***

a) Nối A với C ta có AP là đường trung tuyến của $\Delta ACD$

nên $S_{ADP} = S_{APC} = \frac{1}{2}S_{ADC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Tương tự $S_{CRA} = \frac{1}{2}S_{CBA} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Do đó $S_{APC} + S_{CRA} = S_{\text{ARCP}} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$




Dễ dàng chứng minh được tứ giác HKNM là hình bình hành

Nên $S_{KHA} = S_{KHB} = S_{MNK} = S_{MNC} = S_{AKB} = S_{CMD}$

TRẦN NGỌC DUY – GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

Mà $S_{AKR} = \frac{1}{2}S_{AKB}$ (đáy gấp đôi, chung đường cao)

tương tự: $S_{CMP} = \frac{1}{2}S_{CMD}$

Suy ra: $S_{KHA} = S_{KHB} = S_{MNK} = S_{MNC} = \left(S_{AKR} + S_{CMP}\right) = \frac{1}{5}S_{\mathrm{ARCP}}$

Mà $S_{\mathrm{ARCP}} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{HKM} + S_{MKN} = \frac{2}{5}S_{\mathrm{ARCP}}$

Hay $S_{HKNM} = \frac{2}{5}.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$

$S_{ABCD} = ab\sin\alpha$

Do đó $S_{HKNM} = \frac{1}{5}S_{ABCD} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha$

$S_{HKNM} = \frac{1}{5}S_{ABCD} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha$

Vậy: $S_{HKNM} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha$

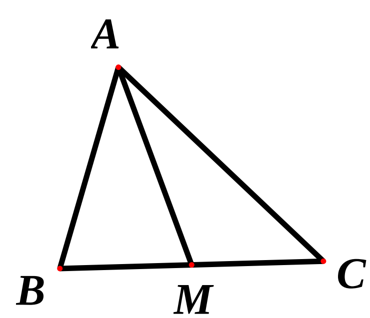
b)Áp dụng: $S_{HKNM} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha \Rightarrow \alpha = 75^0 19'0,54''$

Vậy $A = C = 104^0 40' 59,4''$, $B = D = 75^0 19' 0,54''$

***Bài toán 9.*** (*áp dụng bài toán mở đầu*)

Cho tam giác ABC . Tính độ dài trung tuyến AM, biết BC = a, AC = b, AB = c.

***Lời giải.***




Ta có $AM^2 = BA^2 + \frac{BC^2}{4} - AB.BC.\mathrm{cosB}$ (tam giác ABM) (1)

$AM^2 = CA^2 + \frac{BC^2}{4} - AC.BC.\mathrm{cosC}$ (tam giác ACM) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2AM^2 = AC^2 + BA^2 + \frac{BC^2}{2} - (AB.BC.\mathrm{cosB} + \mathrm{AC.BC.cos}\,C)$ (3)

Mà $\mathrm{cosB} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA.BC}$; $\mathrm{cosC} = \frac{CA^2 + BC^2 - AB^2}{2CA.BC}$ (4)

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

Từ (3) và (4) suy ra $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2}$

Do đó $AM = \sqrt{\dfrac{AB^2}{2} + \dfrac{AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}}$

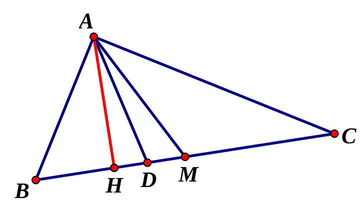
***Bài toán 10.*** *(áp dụng bài toán mở đầu)*

Cho tam giác nhọn ABC, biết AC = b, AB = c; $BAC = \alpha$ . đường trung tuyến AM, đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D (M, D thuộc cạnh BC) .Tính diện tích tam giác ADM theo b, c và $\alpha$ .

***Lời giải.***

Giả sử $\Delta$ABC có AB < AC (1).

Vì AD là phân giác của góc A nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$(2).




Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$2BD < DC + BD.

$\Rightarrow BD < \dfrac{BC}{2} = BM$ . Do đó điểm D nằm giữa B và M

$\Rightarrow$DM = BM – BD = $\dfrac{BC}{2} - BD$.

Từ (2) suy ra $BD = \dfrac{AB.DC}{AC} = \dfrac{AB(BC - BD)}{AC} = \dfrac{AB.BC - AB.BD}{\text{AC}}$

$\Rightarrow$BD.AC = AB.BC – AB.BD $\Rightarrow$BD(AB + AC) = AB.BC

$\Rightarrow BD = \dfrac{AB.BC}{AB + AC}$

$\Rightarrow DM = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{BC(AB + AC) - 2AB.BC}{2(AB + AC)}$ .

Ta có $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{AH.DM}{AH.BC} = \dfrac{DM}{BC} = \dfrac{BC(AB + AC) - 2AB.BC}{2(AB + AC).BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AC - AB}{AB + AC}$

Vì dạng tổng quát: AB có thể lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng AC.

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

Nên ta có: $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| \Rightarrow S_{ADM} = \dfrac{1}{4}b.c.\sin\alpha.\left|\dfrac{b-c}{b+c}\right|$

*Từ kết quả này cho ta bài toán 11*

***Bài toán 11.*** Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM, đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D (M, D thuộc cạnh BC) với AB = 10 cm. Xác định độ dài cạnh AC của $\Delta$ABC để $S_{ADM} = 25\% S_{ABC}$.

***Lời giải.*** *Áp dụng kết quả bài toán 10*

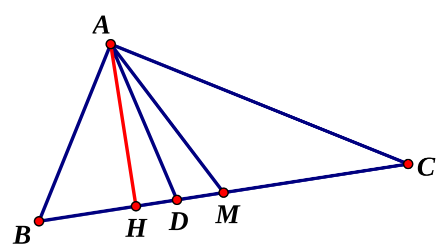
Ta có $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{AB-AC}{AB+AC} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{AB-AC}{AB+AC} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC = \dfrac{10}{3} \\ AC = 30 \end{array}\right.$.

Vậy AC = 30 (cm) hoặc AC = $\dfrac{10}{3}$ (cm) thì $S_{ADM} = 25\% S_{ABC}$.

*Từ kết quả của bài toán 10 ta cũng có bài toán sau:*

***Bài toán 12.*** Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM, đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D (M, D thuộc cạnh BC).

Chứng minh rằng: $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$




***Lời giải.*** Giả sử $\Delta$ABC có AB < AC (1)

Vì AD là phân giác của góc A nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$ 2BD < DC + BD

$\Rightarrow BD < \dfrac{BC}{2} = BM$ .Do đó điểm D nằm giữa B và M

$\Rightarrow$ DM = BM – BD = $\dfrac{BC}{2} - BD$

Từ (2) suy ra $BD = \dfrac{AB.DC}{AC} = \dfrac{AB(BC-BD)}{AC} = \dfrac{AB.BC - AB.BD}{\text{AC}}$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

$\Rightarrow$BD.AC = AB.BC – AB.BD $\Rightarrow$BD(AB + AC) = AB.BC

$$\Rightarrow BD = \frac{AB.BC}{AB+AC}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{BC}{2} - \frac{AB.BC}{AB+AC} = \frac{BC(AB+AC)-2AB.BC}{2(AB+AC)}$$

Ta có $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{AH.DM}{AH.BC} = \frac{DM}{BC} = \frac{BC(AB+AC)-2AB.BC}{2(AB+AC).BC} = \frac{1}{2}.\frac{AC-AB}{AB+AC}$

Vì dạng tổng quát: AB có thể lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng AC

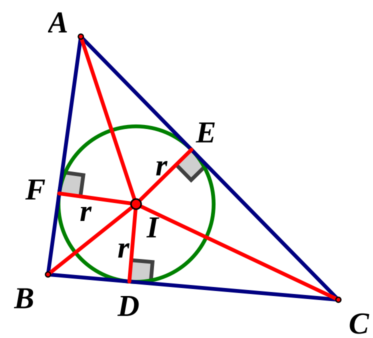
Nên ta có: $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|$(a)

Ta có $AB = \frac{AH}{\sin B}$ và $AC = \frac{AH}{\sin C}$(trong $\Delta$ABH vuông tại H, $\Delta$ACH vuông tại H)

$$\Rightarrow \frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{\frac{AH}{\sin B}-\frac{AH}{\sin C}}{\frac{AH}{\sin B}+\frac{AH}{\sin C}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin C}}{\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin C-\sin B}{\sin B+\sin C}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right| \text{ (b)}$$

Từ (a) và (b) suy ra: $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$ (đpcm).

***Bài toán 13.*** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, bán kính r, biết BC = a, AC = b, AB = c và $p = \frac{a+b+c}{2}$.




a) Tính diện tích tam giác ABC theo p và r.

b) Chứng minh: $r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$

***Lời giải.***

a) Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IBC} + S_{\Delta IAC} = \frac{1}{2}AB.r + \frac{1}{2}BC.r = \frac{1}{2}AC.r$

$$= \frac{1}{2}.r(AB+BC+CA) = r.\frac{a+b+c}{2} = p.r$$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

b) Ta có $\Delta$AFI vuông tại F $\Rightarrow$ r = FI = AF.tan $FAI$ =AF.tan$\frac{A}{2}$(1)

Mà $p-a=\frac{AB+AC+BC-2BC}{2}=\frac{AB+AC-BC}{2}$

$$=\frac{AF+BF+AE+CE-BD-DC}{2}=\frac{2AF}{2}=\text{AF} \ (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}$ (3)

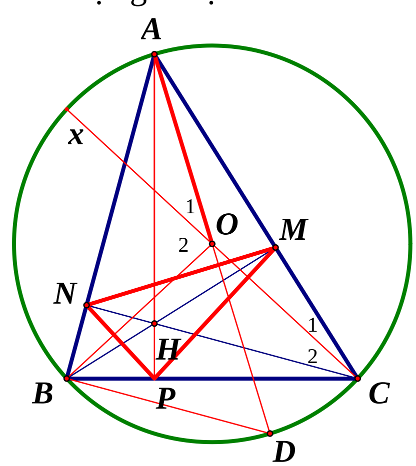
Chứng minh tương tự ta cũng có $r=(p-b)\tan\frac{B}{2}$ ; $r=(p-c)\tan\frac{C}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$

***Bài toán 14.*** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O,R) . Hai đường cao BM, CN cắt nhau tai H.

a) Chứng minh $AMN=ABC$.
b) Chứng minh rằng: OA vuông góc với MN và AB = 2R.sinC
c) Chứng minh: $S_{ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4R}$
d) Xác định số đo $BAC$ để diện tích tứ giác BNMC bằng $\frac{3}{4}$ diện tích tam giác ABC.

e) Tìm điều kiện của tam giác ABC để cosA + cosB + cosC đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.




***Lời giải.***

a) Ta có $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\cos A$ nên $\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

Suy ra $AMN=ABC$

b) Lấy D đối xứng với A qua O. Khi đó ta có $\Delta$ABD vuông tại B

Suy ra $BAD+BDA=90^0$ (1)

Ta có $\Delta$OBC cân tại O và $\Delta$OAC cân tại O.

Nên $ACB=\frac{AOx}{2}+\frac{BOx}{2}=\frac{AOB}{2}$ và $ADB=\frac{AOB}{2}$ (góc ngoài tam giác)

Suy ra $ADB=ACB$ (2)

Mặt khác ta có $\Delta$AMN $\backsim\Delta$ABC (c.g.c).

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

Suy ra $ANM = ACB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $ANM + BAD = 90^0$

Do đó AD $\perp$ MN hay OA $\perp$ MN (đpcm)

Từ (2) suy ra sinC = sinD mà $\sin D = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{2R}$

Suy ra AB = 2R.sinC (4)

c) Ta có $S_{ABC} = \frac{CB.CA.\sin C}{2}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $S_{ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R}$

d) Ta có $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ nên $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2$

Suy ra $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = cos^2 A$

Mà $\frac{S_{BNMC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AMN}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$

Do đó $\sin A = \sqrt{\frac{S_{BNMC}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60^0$

Vậy: $BAC = 60^0$ thì diện tích tứ giác BNMC bằng $\frac{3}{4}$ diện tích tam giác ABC.

e) Kẻ AH cắt BC tại P

Ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = cos^2 A \Rightarrow cosA = \sqrt{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{AM.\mathrm{AN}}{AB.AC}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{AN}{AB} + \frac{AM}{AC}\right)$ (BĐT Cô-si) (6)

Tương tự : $cos\mathrm{B} = \sqrt{\frac{S_{BNC}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{BN.BP}}{BC.AB}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{BN}{AB} + \frac{BP}{BC}\right)$ (7)

$cos\mathrm{C} = \sqrt{\frac{S_{CPM}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{CP.CM}}{AC.BC}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{CP}{BC} + \frac{CM}{AC}\right)$ (8)

Từ (6), (7) và (8) suy ra $\cos A + cosB + cosC \le \frac{3}{2}$.

Dấu ‘=’ xảy ra khi $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}$; $\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}}$; $\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{AC}}$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

Ta lại có $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$; $\frac{BP}{AB}=\frac{BN}{BC}$; $\frac{CM}{BC}=\frac{CP}{AC}$ nên AB = BC = AC.

Do đó $\cos A+\cos B+\cos C$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$ khi tam giác ABC là tam giác đều.

***Bài toán tổng quát:*** Cho tam giác ABC, biết BC = a, AC = b, AB = c. Gọi S, p, r, R lần lượt là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, phân giác AD, trung tuyến AM.

Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

b) S = $\frac{1}{2}bc\sin A=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

d) AD = $\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

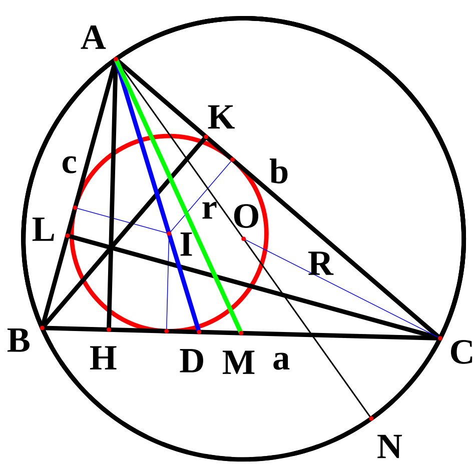
e) $2AM^2=AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}$

f) $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$

***Lời giải.***

Kẻ các đường cao AH, BK, CL của $\Delta ABC$ (H$\in$BC, K$\in$AC, L$\in$AB)

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$. Kéo dài OA cắt đường tròn (O) tại N




TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

a)Ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\frac{CL}{b}}=\frac{ab}{CL};\ \frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\frac{CL}{a}}=\frac{ab}{CL}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ (1)

$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\frac{BK}{c}}=\frac{ac}{BK};\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\frac{BK}{a}}=\frac{ac}{BK}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ (3)

Ta có : ABNC là tứ giác nội tiếp đường tròn (O;R)

$\Rightarrow ANB=ACB=C$

Ba điểm A, O, N thẳng hàng; A và N thuộc đường tròn (O;R)

$\Rightarrow$AN là đường kính của đường tròn (O;R)

$\Rightarrow ANB=90^0$ và AN = 2R

Ta có $\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin ABN}=\frac{c}{\frac{c}{AN}}=AN=2R$ (4) ( $\Delta ABN$ vuông tại B)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (đpcm)

b)Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}c.CL=\frac{1}{2}c.b\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$ (*)

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta IAB}+S_{\Delta IBC}+S_{\Delta IAC}=\frac{1}{2}AB.r+\frac{1}{2}BC.r=\frac{1}{2}AC.r$$

$$=\frac{1}{2}.r(AB+BC+CA)=r.\frac{a+b+c}{2}=p.r\ (**)$$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông, ta có:

$AB^2$- $BH^2$ = $AC^2$ – $HC^2$

$\Leftrightarrow$ $AB^2$- $(BC – CH)^2$ = $AC^2$ – $HC^2$

$\Leftrightarrow$ $AB^2$- ($BC^2$ – 2BC.CH + $CH^2$) = $AC^2$ – $HC^2$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

$\Leftrightarrow$ CH = $\dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2BC} = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$

$\Rightarrow$ CH$^2$ = $\left(\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$

$\Rightarrow$AH$^2$ = b$^2$ - $\left(\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$

$$S^2_{ABC} = \frac{AH^2.BC^2}{4} = \left[b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2\right].\frac{1}{4}.a^2$$

$$= \frac{\left[4a^2b^2 - (b^2 + a^2 - c^2)^2\right].a^2}{16a^2}$$

$$= \frac{(2ab + b^2 + a^2 - c^2)(2ab - b^2 - a^2 + c^2)}{16}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{16}$$

$$= \frac{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{16}$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (***)

Từ câu a) $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin A = 2R.\dfrac{CL}{b}$

$\Rightarrow$ab = 2R.CL $\Rightarrow$abc = 2R.CL.c = 2R.2S$_{ABC}$

$\Leftrightarrow abc = 4R.S_{ABC} \Leftrightarrow S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$ (****)

Từ (*),(**), (***),(****), ta có

S = $\dfrac{1}{2}bc\sin A = pr = \sqrt{p(p-a)p-b)(p-c)} = \dfrac{abc}{4R}$ (đpcm)

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

c) Ta có $b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + AB^2 - 2AB.AC.\dfrac{AK}{AB}$

$= AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + (AK^2 + BK^2) - 2AC.AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 - 2(AK + KC)AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 - 2(AK + KC)AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 - 2AK^2 - 2AK.KC$

$= KC^2 + BK^2 = BC^2 = a^2$

Vậy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (đpcm)

d) Ta có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD.AC.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{2}\left(AB + AC\right)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = AD.\sin\frac{A}{2}\left(AB + AC\right)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\cos\frac{A}{2} = AD\left(AB + AC\right)$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2AB.AC\cos\frac{A}{2}}{AB + AC}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c}$$ (đpcm)

e) Ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$AC^2 = AH^2 + CH^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

$\Rightarrow$ $AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + \left(\frac{BC}{2} - HM\right)^2 + \left(\frac{BC}{2} + HM\right)^2$

$= 2AH^2 + \frac{BC^2}{4} + HM^2 - BC.HM + \frac{BC^2}{4} + HM^2 + BC.HM$

$= 2AH^2 + \frac{BC^2}{2} + 2HM^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} = 2AH^2 + 2HM^2 = 2(AH^2 + 2HM^2) = 2AM^2$

Vậy: $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$ (đpcm)

f) Giả sử $\Delta$ABC có AB < AC (1)

Vì AD là phân giác của góc A nên $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$ 2BD < DC + BD

$\Rightarrow BD < \frac{BC}{2} = BM$ .Do đó điểm D nằm giữa B và M

Ta có $\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC} + S_{ADB}} = \frac{AB}{AC + AB}$ hay $\frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \frac{AB}{AC + AB}$ suy ra $S_{ADB} = \frac{S_{ABC}.AB}{AC + AB}$ (3)

Vì AM là trung tuyến nên $S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2}$ (4)

Do đó $S_{ADM} = S_{ABM} - S_{ADB}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $S_{ADM} = \frac{S_{ABC}}{2} . \frac{AC - AB}{AB + AC}$

Hay $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{AC - AB}{AB + AC}\right|$



TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

Vậy $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right|$.(a)

Theo định lí hàm sin , ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\Rightarrow$ sinB = $\dfrac{b}{2R}$, sinC = $\dfrac{c}{2R}$

Nên $\dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right|$(b)

Từ (a) và (b) suy ra: $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$ (đpcm).

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

***Bài 1.*** Cho tam giác ABC, AB = 8,91 cm, AC = 10,32 cm, $BAC = 72^0$. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Độ dài cạnh BC, số đo góc B, C của tam giác ABC.
c) Độ dài phân giác AD
d) Độ dài đường trung tuyến AM
e) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
f) Bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC.

***Bài 2.*** Cho tam giác ABC, AB = 9 cm, AC = 11 cm, BC =12 cm. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Số đo góc A, B, C của tam giác ABC.
c) Độ dài phân giác AD
d) Độ dài đường trung tuyến AM
e) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
f) Bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC.

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

***Bài 3.*** Cho tam giác ABC có chu vi là 107 cm, $ABC = 30^0 15'$, $ACB = 54^0 25'$. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Độ dài phân giác AD
c) Độ dài đường trung tuyến AM
d) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
e) Bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC.

***Bài 4.*** Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 22,121944 cm, $ABC = 67^0 22'12''$, $ACB = 21^0 12'$. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Độ dài phân giác AD
c) Độ dài đường trung tuyến AM
d) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
e) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

***Bài 5.*** Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Tính theo a, b, c:

a) Độ dài ba đường phân giác trong AD, BE, CF của tam giác.
b) Diện tích tam giác DEF.

***Bài 6.*** Cho tam giác ABC có $BAC = 75^0 19'54''$, AB = 25,81911 cm, AC = 41,02013 cm . Tính chính xác 4 chữ số thập phân.

a) Độ dài ba trung tuyến AD, BE, CF của tam giác.
b) Diện tích tam giác DEF.

***Bài 7.*** Cho hình chữ nhật ABCD, có BC = a, AB = b. Kẻ CK vuông góc với BD tại K. Tính diện tích tam giác ABK theo a,b.

***Bài 8.*** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r). Tính khoảng cách giữa hai tâm của đường tròn theo R, r.

TRẦN NGỌC DUY – GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

## HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**+ Kết quả: Dạy bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán các cấp:**

| Năm học | Cấp huyện | Cấp tỉnh |
|---|---|---|
| **2011-2012** | - *Lớp 8*: Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 4 giải Nhì, 1giải Ba) | *Lớp 9*: Đạt 18/20 (1 giải Nhất, 5 giải Nhì, 6 giải Ba, 6 giải KK). |
| **2012-2013** | - *Lớp 9*: Đạt 6/7 (1 Nhất, 2 Nhì, 2 Ba, 1KK)<br>-*Lớp 8:* Đạt 4/7 (2 giải Nhì, 1giải Ba, 1giải KK). | *Lớp 9:* Đạt 11/20 (2 giải Nhì, 4 giải Ba, 5 giải KK). |
| **2013-2014** | -*Lớp 8*: Đạt 10/10 (2 giải Nhì, 4 giải Ba, 4 giải KK).<br>- *Lớp 9:* Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 1 giải Nhì, 2 giải Ba, 2 giải KK). | Đạt 17/20 (4 giải Nhì, 4 giải Ba, 9 giải KK). |
| **2014-2015** | -*Lớp 9:* Đạt 7/10 ( 2 giải Nhì, 3 giải Ba, 2 giải KK) | Đạt 11/20 (7 giải Ba, 4 giải KK). |
| **2015-2016** | -*Lớp 9:*Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 2 giải Nhì, 2 giải Ba, 1 giải KK) | -*Lớp 9:*Đạt 9/20 (3 giải Nhì, 4 giải Ba, 2 giải KK) |
| **2016-2017** | *Lớp 9:*Đạt 6/7 (2 giải Nhì, 3 giải Ba, 1 giải KK) | -*Lớp 9:*Đạt 11/20 (3 giải Nhì, 4 giải Ba, 2 giải KK) |

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

| | | |
|---|---|---|
| **2017-2018** | *Lớp 9:*Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 3 giải Nhì, 1 giải Ba, 1 giải KK)<br><br>*Lớp 8:* Đạt 9/10 (2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 3 giải Ba, 1 giải KK) | -Lớp 9: Đạt 19/20 (2 giải Nhất, 5 giải Nhì, 7 giải Ba, 5 giải KK). |
| **2018-2019** | *Lớp 9:* Đạt 10/10 (2 giải Nhất, 4 giải Nhì, 4 giải Ba) | -Lớp 9: Đạt 18/20 (5 giải Nhì, 8 giải Ba, 5 giải KK). |
| **2019-2020** | *Lớp 9:* Đạt 7/7 (1 giải Nhất, 6 giải Nhì) | |

+ Có 1 học sinh đậu vào lớp 10 trường chuyên Toán thuộc Đại học Quốc gia TPHCM, đậu thủ khoa trường THPT Mộ Đức số 2 và nhiều em vào trường chuyên Lê Khiết, nhiều em đạt điểm 10 môn Toán trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 và lớp chọn của trường THPT số 2 Mộ Đức.

+ Sáng kiến này cũng đã tham gia bồi đưỡng học sinh giải Toán trên máy tính cầm tay Casio các cấp.

**Kết quả: Dạy bồi dưỡng giải Toán trên máy tính cầm tay các cấp :**

| **Năm học** | **Cấp trường** | **Cấp huyện** | **Cấp tỉnh** | **Quốc gia** |
|---|---|---|---|---|
| **2010-2011** | Đạt 5/8 ( 3 giải Nhì, 2 giải Ba) | Đạt 3/5 (1 giải Nhất, 2 giải Ba) | | |

TRẦN NGỌC DUY - GVTRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **2011-2012** | Đạt 29/35 ( 4 giải Nhất, 7 giải Nhì, 14 giải Ba ,4 giải KK) | Đạt 9/17 ( 2 giải nhì, 1 giải Ba, 6 giải KK) | Đạt 8/10 (2 giải nhất, 3 giải Nhì, 2 giải Ba, 1 giải KK) | Đạt 1/5 (1 giải KK) |
| **2012-2013** | Đạt 12/27 ( 4 giải Nhất, 1 giải Nhì, 5 giải Ba ,2 giải KK)-Lớp 9 | Đạt 11/12 ( 2 giải Nhất, 4 giải nhì, 5 giải Ba)-Lớp 9 | Đạt 8/10 ( 3 giải Nhì, 2 giải Ba, 3 giải KK) | Đạt 3/5 (2 giải Ba,1 giải KK) |
| **2013-2014** | | Khối 8: Đạt 11/15 ( 5 giải Ba, 6 giải KK)<br>Khối 9: Đạt 13/15 ( 2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 3 giải Ba, 5 giải KK) | Đạt 7/10 (2 giải Nhất, 2 giải Nhì, 2 giải Ba, 1 giải KK) | Đạt 3/5 (1 giải Ba, 2 giải KK) |
| **2014-2015** | | Khối 9: Đạt 10/10 (2 giải Nhất, 5 giải Nhì, 3 giải Ba) | Đạt 10/10 (1 giải Nhất, 3 giải Nhì, 4 giải Ba, 2 KK) | **Đạt** 3/5 (1 giải Ba, 2 giải KK) |
| **2015-2016** | | -Lớp 8: Đạt 10/10( 5 giải | - Lớp 9: Đạt 9/10 (2 giải | Đạt 5/5 ( 3 giải Nhất, |

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Nhất, 3 giải Nhì, 2 giải Ba)<br>- Lớp 9: Đạt 10/10 ( 2 giải Nhất, 6 giải Nhì, 2 giải Ba) | Nhất, 1 giải Nhì, 3 giải Ba, 3 giải KK) | 2 giải Nhì) |
| **2016-2017** | | -Lớp 8: Đạt 10/13(2 giải Nhì, 4 giải Ba, 4 giải KK)<br>- Lớp 9: Đạt 11/11 ( 3 giải Nhất, 6 giải Nhì, 2 giải Ba) | Lớp 9: Đạt 10/10 (1 giải Nhất, 5 giải Nhì, 2 giải Ba, 2 giải KK) | Đạt 3/5 ( 1 giải Nhì, 1 giải Ba, 1 giải KK) |
| **2017-2018** | | -Lớp 8: Đạt 12/12(2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 5 giải Ba, 2 giải KK)<br>- Lớp 9: Đạt 11/13 ( 2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 5 giải Ba, 1 giải KK) | | |

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

# KẾT LUẬN

Trên đây là hệ thống những bài toán từ một công thức tính diện tích của tam giác và một đẳng thức mà qua quá trình giảng dạy, tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi, dạy học tự chọn mà bản thân tôi đã tổng hợp được. Thật ra đây là những bài toán mà ta có thể bắt gặp ở các sách, đề thi, ….

Việc hệ thống các bài tập trong chuyên đề này chỉ có tính hệ thống để cho chúng ta suy nghĩ và tìm ra một lớp các bài toán khác hay vận dụng nó để giải các bài toán khác. Trong mỗi bài toán, tuỳ theo cách phát triển mà ta sẽ có những bài toán mới tương ứng. Để học sinh thấy được nhiều ứng dụng của bài toán ban đầu . Thông qua sang kiến này hình thành cho học sinh tư duy phát triển tạo ra những cái mới từ cái ban đầu. Muốn vậy thì ta phải dạy cho học sinh nắm thật chắc các kiến thức cơ bản, nắm được các phương pháp giải các dạng bài tập và đặc biệt thường xuyên rèn luyện kỹ năng tìm tòi và kỹ năng khai thác, ứng dụng cho học sinh.

Với suy nghĩ như vậy. Tôi tin tưởng mỗi chúng ta có thể làm cho học sinh không còn bỡ ngỡ và lúng túng khi gặp vấn đề khó trong toán học cũng như trong cuộc sống. Vì khả năng và thời gian có hạn nên sáng kiến này xin tạm dừng tại đây.

Rất mong sự góp ý của các đồng chí, đồng nghiệp để sáng kiến này được phát huy và được mở rộng hơn nữa.

***Đức Nhuận, ngày 20 tháng 9 năm 2019.***

*Tôi xin cam đoan đây là SK bản thân thực hiện, không sao chép nội dung của người khác, nếu vi phạm tôi xin chịu xử lý theo quy định./.*

**XÁC NHẬN CỦA PHÓ HIỆU TRƯỞNG**

*Người viết*

*Trần Ngọc Duy*

Trần Thị Xuân Thuyền

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG KH CẤP TRƯỜNG

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
.................

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học: ………...................................................

- Hiệu quả: .............................................................................................

- Xếp loại: ...............................................................................................

Đức Chánh*, ngày ... tháng .... năm 2020.*

CT. HĐKH CẤP TRƯỜNG

Trần Thị Xuân Thuyền

TRẦN NGỌC DUY - GV TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI