KHAI THÁC BÀI TOÁN NỬA ĐƯỜNG TRÒN

TRẦN NGỌC DUY

(GV THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức, Quảng Ngãi)

Trong thực tế dạy - học toán có rất nhiều bài toán mà khi giải xong bài toán nếu ta tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi và khám phá có thể tìm được nhiều ý tưởng hay, độc đáo để từ đó có thể sáng tạo nên một chuỗi bài toán hay từ dễ đến khó để ôn tập kiểm tra giữa kỳ, cuối học kỳ, thi học sinh giỏi, thi vào lớp 10. Bài viết này tôi giới thiệu một số bài toán khai thác từ một bài toán Hình học lớp 9 đơn giản đó là:

Bài toán (Bài 30 trang 116, sách giáo khoa toán 9 - Tập 1). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Ax và By theo thứ tự ở C và D. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{COD} = 90^0$.

b) AC + BD = CD.

c) Tích AC.BD không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

Từ giả thiết của bài toán trên mà ta có thể thêm một chút giả thiết nữa để có câu hỏi mới nhằm ôn tập, hệ thống kiến thức đã học cho học sinh một cách tổng hợp.

Bài toán1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt tiếp tuyến Ax, By lần lượt tại C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1.Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm M, O, B, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) $\widehat{COD} = 90^0$.

c) AC + BD = CD.

d) AC.BD không đổi và $\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}$ không đổi khi M chạy trên cung AB.

e) OC // MB

f) AB là tiếp tuyến đường tròn (I) đường kính CD

g) MN $\perp$ AB

h) DE.DA = DM^2 (với E là giao điểm của (O) với AD)

i) BC đi qua trung điểm MH (H là giao điểm của MN với AB)

j) AI // HD

k) $\frac{1}{MC}+\frac{1}{MD}=\frac{2}{MH}$.

2. Xác định vị trí của điểm M trên cung AB để:

a) AC + BD nhỏ nhất.

b) Chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất

c) Diện tích tứ giác ACDB nhỏ nhất.

d) Diện tích tam giác AMB lớn nhất.

e) Chu vi tam giác MHO lớn nhất (AM < MB)

f) $\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MB^2}$ nhỏ nhất.

3. Khi AM = R. Tính diện tích ACDB theo R.

4. Khi AM < MB. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt đường thẳng AM tại F. Tứ giác OFDB là hình gì? Vì sao?

5. Gọi K là giao điểm của OD và BM. Chứng minh: DE.DA = DK.DO.

6. Tia BM cắt tia Ax tại P, tia phân giác góc PAM cắt (O) tại Q và cắt BM tại S. Gọi J là giao điểm của BQ với AM. Chứng minh PA // SJ.

7. Chứng minh: $AD \perp PO$.

8. Gọi T là trung điểm của BD. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PT.

9. Chứng minh PT là tiếp tuyến đường tròn đường kính AB.

10. Chứng minh hai đường thẳng AD, PT và đường tròn (O) cùng đi qua một điểm.

11. Đường tròn (M; MH) cắt (O) tại L, U. Chứng minh LU đi qua trung điểm của MH.

12. Chứng minh 4 đường thẳng LU, AD, BC và MH đồng qui.

13. Chứng minh LU // CD.

14. Gọi H_1, H_2 lần lượt là hình chiếu của H lên AM, MB. Chứng minh 4 điểm L, H_1, H_2, U thẳng hàng.

15. Gọi Z là giao điểm của AM và BD. Tính giá trị nhỏ nhất của 2AM + AZ.

16. Hai đường trung tuyến AA', BB' của tam giác ABM cắt nhau tại G. Tính giá trị lớn nhất của tích GA.GB.

17. Lấy M_1 đối xứng với M qua đường thẳng AB. Chứng minh 3 đường thẳng AM, HC, PM_1 đồng qui.

18. Xác định vị trí của điểm M để:

a) Chu vi tam giác COD nhỏ nhất

b) Diện tích tứ giác MH_1HH_2 lớn nhất

19. Chứng minh tứ giác AH_1H_2B nội tiếp

20. Gọi K' là giao điểm của AM và OC. Tính bán kính nhỏ nhất của đường tròn ngoại tiếp tứ giác CK'KD theo R.

21. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác MAC và MBD.

Ta bỏ bớt giả thiết hai tiếp tuyến tại A và B nên ta có bài toán 2 như sau:

Bài toán 2. Cho điểm M tùy ý trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R.

1. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AMB. Tính giá trị lớn nhất của r.

2. Gọi r_m là bán kính của đường tròn bàng tiếp góc M. Tính giá trị lớn nhất của r_m.

3. Tìm quỹ tích của tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMB.

4. Gọi K là tâm của đường tròn bàng tiếp góc AMB của tam giác AMB. Chứng minh rằng 4 điểm A, B, I, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

5. Gọi S_M, S_A, S_B lần lượt là diện tích nửa hình tròn đường kính AB, BM, MA. CMR: $2\left(S_A^2 + S_B^2\right) \geq S_M^2$. Xác định vị trí của điểm M để có dấu bằng xảy ra.

6. Lấy điểm V chuyển động trên đoạn AB. Vẽ cùng phía với nửa đường tròn (O) các nửa đường tròn có đường kính AV, BV. Xác định vị trí của điểm V để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn trên đạt giá trị lớn nhất.

7. Gọi O_1, O_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MHA và MHB. Gọi T_1, T_2 lần lượt là giao điểm của MO_1, MO_2 với AB.

a) Ba đường thẳng MH, O_2T_1, O_1T_2 đồng quy.

b) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để O_1O_2 có độ dài lớn nhất.

c) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ qua M vuông góc với O_1O_2 luôn đi qua một điểm cố định.

d) Đường thẳng O_1O_2 cắt MA, MB lần lượt tại A_1, B_1. Tính giá trị lớn nhất của $S_{MA_1B_1}$.

e) Gọi U là giao điểm của MO_2 với AO_1, Q là giao điểm của MO_1 với AO_2. Chứng minh rằng QU//AB.

f) Chứng minh $\dfrac{S_{MO_1O_2}}{S_{MT_1T_2}}$ không đổi khi M chạy trên cung AB.

g) Chứng minh $S_{MQU} = S_{O_1O_2UQ}$.

h) Xác định vị trí của điểm M để $\dfrac{S_{MAB}}{S_{MT_1T_2}}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

i) Gọi Z là giao điểm của AO_1 và BO_2. Tìm quỹ tích của điểm Z khi M chạy trên cung AB.

j) Chứng minh 4 điểm A, O_1, O_2, B cùng thuộc một đường tròn.

Ta thay diễn đạt giả thiết bài toán 2 một cách tương tự thì ta có bài toán sau:

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có cạnh cố định BC = a và A là điểm di động sao cho $\widehat{BAC}=90^0$. Đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC.

1. Khi a = 10cm, $\widehat{ACB}=30^0$. Tính:
   a) Độ dài AB, AC, AH, HB, HC
   b) Độ dài phân giác AD và DB, DC.
   c) Trung tuyến AM
   d) Diện tích tam giác ADM
   e) Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.
   f) Bán kính đường tròn bàng tiếp góc A, góc B của tam giác ABC.
   g) EA.EB + FA.FC - HB.HC.
2. Chứng minh rằng:
   a) AE.AB = AF.AC
   b) AE.EB + AF.FC = AH^2
   c) $\sqrt{AB.BE}+\sqrt{AC.CF}=BC$
   d) $\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BE}{CF}$
   e) $\sqrt[3]{BC^2}=\sqrt[3]{BE^2}+\sqrt[3]{CF^2}$
   f) AH^3 = EB.BC.FC.
   g) $S_{AEHF}=\dfrac{AH^3}{BC}$
   h) $\sqrt{S_{BEH}}+\sqrt{S_{CFH}}=\sqrt{S_{ABC}}$
   i) HE.HF = BE.CF
   j) $\dfrac{AH^2}{BE.CF}=\dfrac{AC}{AB}+\dfrac{AB}{AC}$
   k) $BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$
   l) AM $\perp$ EF.
   m) $\dfrac{BE}{CF}=\tan^3 C$.
   n) HB.HC $\geq$ 2BE.CF
   p) $\tan^3$B + $\tan^3$C $\geq$ 2.
   q) $AD=\sqrt{2}.\dfrac{AB.AC}{AB+AC}$
   r) BE = BC.$\cos^3$B; CF = BC.$\cos^3$C.

3. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của HB, HC. Tứ giác EIJF là hình gì? Vì sao?
4. Gọi K, L lần lượt đối xứng với H qua AB, AC. CMR: $S_{KBCL}=4S_{EIJF}$.
5. Tìm điều kiện của tam giác ABC để tổng EA.EB + FA.FC đạt giá trị lớn nhất.
6. Tìm điều kiện của tam giác ABC để tổng BE^2+CF^2 đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}$.
8. Biết $S_{\Delta ABH}=13,5\,cm^2$; $S_{\Delta ACH}=24\,cm^2$. Tính BC.
9. Biết chu vi của tam giác ABH là 30,96cm và chu vi của tam giác AHC là 41,28cm. Tính $S_{\Delta ABC}$.

10.Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC, cắt HE tại P, đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC, cắt HF tại Q. Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

11. Phân giác góc B cắt AH, AC lần lượt tại E' và D'. Gọi I' là trung điểm của D'E'. Chứng minh: $BI'H = ACB$.

12. Tính số đo góc B, góc C khi $AH^2 = 4AE.AF$.

13. Gọi S_A, S_B, S_C lần lượt là diện tích nửa hình tròn đường kính BC, CA, AB. CMR: $2\left(S_B^2 + S_C^2\right) \geq S_A^2$. Xác định vị trí của điểm A để có dấu bằng xảy ra.

14. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp.

15. Gọi K' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEFC. Chứng minh: $S_{(K')} = S_{(M)} + S_{(O)}$.

16 Chứng minh EF là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (I) và (J)

17. Chứng minh AH là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (I) và (J)

Từ câu 16,17 của bài toán 2 nên ta có bài toán sau

Bài toán 4. Cho hai đường tròn (O;R) và (O';r) tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài DE , với D thuộc (O) và E thuộc (O'). kẻ tiếp tuyến chung trong tại A cắt DE tại I. Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của O'I và AE.

a) Chứng minh ΔADE vuông.
b) Tứ giác AMIN là hình gì ? Vì sao ?
c) Chứng minh hệ thức: IM . OI = IN . IO'
d) Chứng minh OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE.
e) Tính độ dài DE biết rằng OA = 5 cm, O'A = 3,2 cm.
f) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'
g) Chứng minh $DE^2 = 4Rr$
h) Gọi B, C lần lượt là giao điểm của đường thẳng OO' với (O) và (O') và H là giao điểm của BD với CE. CMR: 3 điểm H, I, A thẳng hàng.

Ta lại đổi giả thiết bài toán 3 một chút thì ta lại có một số câu hỏi như bài toán 3.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường cao AH, đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB tại E và cắt AC tại F.

1. Khi AB = 6cm, AC = 8cm . Tính:
   a) Độ dài AB, AC, AH, HB, HC
   b) Độ dài phân giác AD và DB, DC.
   c) Trung tuyến AM
   d) Diện tích tam giác ADM
   e) Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.
   f) Bán kính đường tròn bàng tiếp góc A, góc B của tam giác ABC.
   g) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEFC.
   h) EA.EB + FA.FC - HB.HC.
2. Chứng minh rằng:
   a) AE.AB = AF.AC
   b) $AE.EB + AF.FC = AH^2$
   c) $\sqrt{AB.BE} + \sqrt{AC.CF} = BC$
   d) $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BE}{CF}$
   e) $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2}$
   f) $AH^3 = EB.BC.FC$.
   g) $S_{AEHF} = \dfrac{AH^3}{BC}$
   h) $\sqrt{S_{BEH}} + \sqrt{S_{CFH}} = \sqrt{S_{ABC}}$
   i) HE.HF = BE.CF

j) $\dfrac{AH^2}{BE.CF} = \dfrac{AC}{AB} + \dfrac{AB}{AC}$

k) $BE\sqrt{CH} + CF\sqrt{BH} = AH\sqrt{BC}$

l) AM $\perp$ EF.

m) $\dfrac{BE}{CF} = \tan^3 C$.

n) HB.HC $\geq$ 2BE.CF

p) $\tan^3 B + \tan^3 C \geq 2$.

q) $AD = \sqrt{2}.\dfrac{AB.AC}{AB + AC}$

r) BE = BC.$\cos^3$B; CF = BC.$\cos^3$C.

t) Tứ giác BEFC nội tiếp.

u) Gọi K' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEFC. Chứng minh: $S_{(K')} = S_{(M)} + S_{(O)}$.

3. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của HB, HC. Tứ giác EIJF là hình gì? Vì sao?
4. Gọi K, L lần lượt đối xứng với H qua AB, AC. CMR: $S_{KBCL} = 4S_{EIJF}$.
5. Tìm điều kiện của tam giác ABC để tổng EA.EB + FA.FC đạt giá trị lớn nhất.
6. Tìm điều kiện của tam giác ABC để tổng $BE^2 + CF^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF}$.
8. Biết $S_{\Delta ABH} = 13,5\,cm^2; S_{\Delta ACH} = 24\,cm^2$. Tính BC.
9. Biết chu vi của tam giác ABH là 30,96cm và chu vi của tam giác AHC là 41,28cm. Tính $S_{\Delta ABC}$.
10. Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC, cắt HE tại P, đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC, cắt HF tại Q. Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng.
11. Phân giác góc B cắt AH, AC lần lượt tại E' và D'. Gọi I' là trung điểm của D'E'. Chứng minh: $BI'H = ACB$.
12. Tính số đo góc B, góc C khi AH^2 = 4AE.AF.
13. Gọi S_A, S_B, S_C lần lượt là diện tích nửa hình tròn đường kính BC, CA, AB. CMR: $2\left(S_B^2 + S_C^2\right) \geq S_A^2$. Xác định vị trí của điểm A để có dấu bằng xảy ra.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Đường tròn tâm E đường kính BH cắt AB ở M và đường tròn tâm I đường kính CH cắt cạnh AC ở N.

a) Chứng minh tứ giác AMHN là hình chữ nhật.
b) Cho biết : AB = 6cm, AC = 8cm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.
c) Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (E) và (I)
d) Để AMHN là hình vuông thì ΔABC cần có điều kiện gì ?

Bài toán 7. Cho hình vuông ABCD. M là điểm tùy ý trên BD, kẻ ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AD.

a) Chứng minh 4 điểm A, E, M, F cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh: DE = CF
c) Chứng minh 3 đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.
d) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BD để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Bài toán 8. Cho $\triangle$AMB vuông tại M, MH$\perp$AB. Gọi O_1, O_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MHA và MHB. Đường thẳng O_1O_2 cắt MA, MB lần lượt tại A_1, B_1. Gọi T_1, T_2 lần lượt là giao điểm của MO_1, MO_2 với BC. Gọi U là giao điểm của MT_2 với AO_1;Q là giao điểm của MT_1 với BO_2; T là giao điểm của AO_1 với BO_2; P là giao điểm của MH với O_1T_2; L là giao điểm của MT với O_1O_2. Hình vẽ trên có tất cả bao nhiêu tứ giác nội tiếp đường tròn từ các điểm trên ?