Bài toán 1: Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

Bài 1. 1.1) Tìm tất cả các cặp tam giác đồng dạng với nhau? Vì sao?

1.2) Tìm tất cả tứ giác nội tiếp được đường tròn? Vì sao?

Bài 2. Chứng minh rằng:

2.1) $AB^2 + HC^2 = BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2$.

2.2) AB.HC + BC.HA +AC.HB = 4S (với S là diện tích$\triangle$ABC)

2.3) $\dfrac{AE^2}{AB^2} = \dfrac{AF.EF}{AC.BC} = \cos^2 A$.

2.4) $BH.BE + CH.CF + AH.AD = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.

2.5) H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle$DEF.

2.6) AE.CD.BF = AF.BD.CE = DE.EF.FD.

2.7) $\dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HC.HA}{BC.BA} + \dfrac{HA.HB}{CA.CB} = \dfrac{DH}{AD} + \dfrac{EH}{BE} + \dfrac{FH}{CF} = \dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}$.

2.8) $\dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HC.HA}{BC.BA} + \dfrac{HA.HB}{CA.CB} = \dfrac{CB}{CD}.\dfrac{HD}{HA}.\dfrac{FA}{FB} = 1$.

2.9) $\dfrac{AD}{HD} + \dfrac{BE}{HE} + \dfrac{CF}{HF} \ge 9$; $\dfrac{HA}{HD} + \dfrac{HB}{HE} + \dfrac{HC}{HF} \ge 6$.

2.10) $\dfrac{HD}{AH} + \dfrac{HE}{BH} + \dfrac{HF}{CH} \ge \dfrac{3}{2}$.

2.11) $\dfrac{HA}{BC} + \dfrac{HB}{CA} + \dfrac{HC}{AB} \ge \sqrt{3}$.

2.12) $\dfrac{S_{AEF}}{AH^2} = \dfrac{S_{BDF}}{BH^2} = \dfrac{S_{CDE}}{CH^2}$.

2.13) $\dfrac{AH}{AD} + \dfrac{BH}{BE} + \dfrac{CH}{CF} = 2$.

2.14) $r = \dfrac{AB + AC - BC}{2}.\tan\dfrac{A}{2}$. (r bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle$ABC).

2.15) $r_a = \dfrac{AB + BC + CA}{2}\tan\dfrac{A}{2}$. ($r_a$ bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle$ABC)

2.16) $R = \dfrac{AB.BC.CA}{4S_{ABC}}$ (R bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle$ABC).

2.17) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$.

2.18) $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} = 2R$; $\dfrac{AB^2}{\cot A + \cot B} = \dfrac{BC^2}{\cot B + \cot C} = \dfrac{CA^2}{\cot C + \cot A}$

$\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S_{ABC}}$

2.19) $HA + HB + HC < \dfrac{2}{3}\left(AB + BC + CA\right)$.

2.20) $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{BC}{2\sqrt{AB.AC}}$; $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{2} < \cos A + \cos B + \cos C$.

2.21) $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$; $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$; $\tan^3 B+\tan^3 C\ \ge 2$.

2.22) $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$; $\cos A.\cos B.\cos C\le\frac{1}{8}$; $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$

2.23) $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\cos^2 A$.

2.24) $\frac{S_{BFEC}}{S_{ABC}}=\sin^2 A$

2.25) $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\sin^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$; $2\le\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$.

2.26) A, B, C là các tâm đường tròn bàng tiếp của $\triangle$DEF.

2.27) OB vuông góc với DF. (O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle$ABC)

2.28) $\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A$

2.29) $\frac{BC}{AH}+\frac{AC}{BH}=\frac{AB}{HF}$.

2.30) BF.BA = BH.BE = BD.BC

2.31) HA.HD = HB.HE = HC.HF

2.32) $\frac{EA}{EC}+\frac{FA}{FB}=\frac{HA}{HD}$.

2.33) AH.EF = AF.HE + HF.AE.

2.34) HA = 2RcosA; HB = 2RcosB; HC = 2RcosC.

2.35) $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2}\ge 4$.

2.36) $\frac{AB.BC+BC.CA+CA.AB}{AH.AD+BH.BE+CH.CF}\le 2$.

2.37) $\frac{HA+HB+HC}{HD+HE+HF}\ge 2$.

2.38) $\frac{HA.HB.HC}{HD.HE.HF}\ge 8$.

2.39) $\frac{\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC}}{\sqrt{HD}+\sqrt{HE}+\sqrt{HF}}\ge\sqrt{2}$.

Bài 3. Gọi (I;r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng:

a) $OI=\sqrt{R^2-2Rr}$

b) $IA+IB+IC\ge 6r$.

c) $IA.IB.IC\ge 8r^3$.

d) $\sqrt{IA}+\sqrt{IB}+\sqrt{IC}\ge 3\sqrt{2r}$

e) $HA+HB+HC\ge 12r_1$

f) $HA.HB.HC\ge 64r_1^3$

g) $\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC}\ge 6\sqrt{r_1}$

Bài 4. Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Chứng minh rằng: a) $R_1+R_2+R_3\ge 3R$.

b) $R_1.R_2.R_3\ge R^3$

c) $\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}+\sqrt{R_3}\ge 3\sqrt{R}$.

Bài 5. Gọi J, J', J'' lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

a) OJ + OJ' +OJ'' = R + r.

b) HA + HB + HC = 2(R +r).

c) $HJ+HJ'+HJ''\ge \frac{3}{2}R$

d) $HD+HE+HF\le \text{OJ+OJ'+OJ''}\le \frac{3}{2}R$

e) $HD+HE+HF\le R+r$.

f) $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

g) $R\ge 2r$.

h) $\text{AJ+BJ'+CJ''}\le \frac{9R}{2}$.

i) $\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}}\ge 3\sqrt{2}$

k) $AB.BC.CA\ge 24\sqrt{3}\,r^3$

l) $\sin A.\sin B.\sin C\ge 3\sqrt{3}.\left(\frac{r}{R}\right)^3$

m) $\text{AJ+BJ}'+CJ''\le 4R+r$

Bài 6. Đường thẳng qua H vuông góc với HJ cắt AC tại Q và AB tại R. CMR: H là trung điểm của QR.

Bài 7. Gọi T là giao điểm của AD và EF. Lấy điểm L trên đoạn thẳng CD. Vẽ AS vuông góc với HL tại S. CMR: a) SH là đường phân giác của $\widehat{TSD}$; b) $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DH}=\frac{2}{DT}$.

Bài 8. Gọi F', E' là giao điểm của FE với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. CMR: AF' là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DHF'.

Bài 9. Khi A là điểm cố định, B và C thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. CMR: EF luôn song song với một đường thẳng cố định.

Bài 10. Gọi F_1, E_1 là hình chiếu của B, C trên EF. CMR: $FF_1 = EE_1$.

Bài 11. Gọi E_2 là trung điểm của AH, E_3 là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{BE_2E_3}=90^0$. CMR: OE_3 song song với BC.

Bài 12. Kẻ FH’ và EK cùng vuông góc với BC (H’, K $\in$ BC), kẻ H’M //AC và KN//AB (M$\in$AB, N$\in$AC). Chứng minh EF//MN.

Bài 13. a) Gọi D_1, D_2 lần lượt là hình chiếu của D lên cạnh AB, AC. CMR: D_1D_2//EF.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K’ là giao điểm của D_1D_2 với AO. Chứng minh: AD^3 = AB.AC.AK’.

Bài 14. Gọi D_3, D_4 lần lượt là hình chiếu của D lên cạnh BE, CF. CMR: Bốn điểm D_1, D_2, D_3, D_4 cùng thuộc một đường thẳng.

Bài 15. Gọi T là giao điểm của AD và EF. Chứng minh D_1D_2 đi qua trung điểm của DT.

Bài 16. Gọi G, U lần lượt là giao điểm của EF với DD_1 và DD_2. CMR: Chu vi tam giác DEF bằng độ dài đoạn thẳng GU.

Bài 17. Qua D kẻ đường thẳng d song song với EF cắt AB, HC lần lượt tại V và S_1. CMR: $DV = DS_1$.

Bài 18. Gọi K_1 là giao điểm của d và AC. CMR: Các tứ giác DFGV, $DEUK_1$ là hình thoi.

Bài 19. Qua C kẻ đường thẳng song song với EF cắt đường thẳng AB tại Z. CMR: FD đi qua trung điểm của CZ.

Bài 20. Qua C kẻ đường thẳng song song với DF cắt đường thẳng AB tại X. CMR: F là trung điểm của XZ.

Bài 21. Gọi Y, W lần lượt là hình chiếu của F trên AD và AC. Chứng minh rằng các đường thẳng D_4D_2, WY và DF đồng qui.

Bài 22. Kẻ trung trực của AH cắt AB, AC lần lượt tại E_5, E_6. Chứng minh A là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác OE_5E_6. (OA là phân giác góc E_5OE_6).

Bài 23. Gọi P’, Q’, U’ lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ BC, CA, AB ; P_1' là giao điểm của AP’ với BC; P_2', P_3' lần lượt là hình chiếu của P_1' lên AB, AC.

23.1)Chứng minh rằng:

a) AP’ là phân giác $\widehat{HAO}$;

b) $S_{ABC} = S_{AP_2'P'P_3'}$

c) $IP' + IQ' + IU' \ge IA + IB + IC \ge 6r$

d) $IP'.IQ'.IU' \ge IA.IB.IC \ge 8r^3$

e) $\sqrt{IP'} + \sqrt{IQ'} + \sqrt{IU'} \ge \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \ge 3\sqrt{2r}$

23.2) Gọi P_1' là giao điểm AP’ với BC, Q_1' là giao điểm BP’ với CA, U_1' là giao điểm CU’ với AB. Chứng minh rằng: $\dfrac{P'P_1'}{BP' + P'C} + \dfrac{Q'Q_1'}{CQ' + Q'A} + \dfrac{U'U_1'}{AU' + U'B} \ge \dfrac{3}{4}$

23.3) Gọi S_2 là giao điểm của AB với P’U’, T_2 là giao điểm của AC với P’Q’. CMR:

a) S_2T_2 // BC b) S_2T_2 đi qua tâm I nội tiếp tam giác ABC.

Bài 24. Lấy T’ nằm giữa A và D. BT’ cắt AC tại M_1, CT’ cắt AB tại N_1. Chứng minh rằng DA là phân giác góc M_1DN_1.

Bài 25. Kẻ đường kính AA’ cắt BC tại A_1 . Chứng minh: a) $\dfrac{DB}{DC} + \dfrac{A_1B}{A_1C} \ge 2\dfrac{AB}{AC}$

b) TA_1//HA’

Bài 26. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của các tia AD, BE, CF với (O).

a) Tính: $\frac{AA_2}{AD}+\frac{BB_2}{BE}+\frac{CC_2}{CF}$, b) CMR: $\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}}=\frac{HA_2.HB_2.HC_2}{HA.HB.HC}$ c) $S_{A_2B_2C_2}\le S_{ABC}$.

d) Tam giác DEF và $A_2B_2C_2$ có chung tâm đường tròn nội tiếp

Bài 27. Gọi P là giao điểm của đường thẳng BC và EF. Chứng minh: $\frac{PB}{PC}=\frac{DB}{DC}$ và D là trung điểm của VS_1.

Bài 28. Gọi K_1 là giao điểm của d với AC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔPVK_1 đi qua trung điểm của cạnh BC.

Bài 29. Tính diện tích các hình tròn ngoại tiếp tam giác HBC, HCA, HAB theo R.

Bài 30. Tính diện tích hình viên phân tạo bởi cung BC và dây BC theo R. Khi $\widehat{BAC}=30^0$.

Bài 31. Các đường trung tuyến AJ, BJ', CJ'' cắt (O) lần lượt tại J_1, J_2, J_3. Chứng minh rằng: $\frac{JJ_1}{BC}+\frac{J'J_2}{CA}+\frac{J''J_3}{AB}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 32. Lấy điểm M' trên cung nhỏ BC. Gọi M_1', M_2', M_3' lần lượt là hình chiếu của M' lên BC, CA, AB. Gọi U', V' lần lượt đối xứng với M' qua AB, AC.

Chứng minh a) Ba điểm M_1', M_2', M_3' thẳng hàng

b) $\frac{BC}{M'M_1'}=\frac{AC}{M'M_2'}+\frac{AB}{M'M_3'}$. c) Ba điểm U', H, V' thẳng hàng

Bài 33. Đường thẳng đi qua A song song với JH và đường thẳng đi qua H song song với JA cắt nhau tại P_1 (J là trung điểm của BC). Chứng minh rằng:

a) $AH^2+BC^2=JP_1^2$.

b) JF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

c) $JP_1\perp EF$

Bài 34. **(2000 Beijing Math Contest).** *Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :* $\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\ge\frac{R}{r}$.

Bài 35. *Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :* $\frac{\cot A}{\sin A}+\frac{\cot B}{\sin B}+\frac{\cot C}{\sin C}\ge 2$.

Bài toán 2: Cho (O,R) và dây BC < 2R cố định; A chạy trên cung lớn BC

1) Khi ΔABC nhọn có các đường cao AD; BE; CF đồng quy tại H.

1.1) Chứng minh rằng:

a) H luôn cách đều ba cạnh của ΔDEF.

b) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$. Từ đó chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi

c) OA luôn luôn vuông góc với EF.

d) $S_{ABC}=p'.R$ (p' là nửa chu vi của ΔDEF)

e) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC để p' đạt giá trị lớn nhất.

f) Tổng BE.BH + CF.CH không đổi.

1.2) Xác định số đo góc A của tam giác ABC để $S_{AEF}=\frac{3}{4}S_{ABC}$.

1.3) Xác định số đo góc A của tam giác ABC để $S_{ABC}=2S_{BCEF}$.

1.4) Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC để diện tích ΔBHC đạt giá trị lớn nhất.

1.5) Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho AB + 2.AC lớn nhất.

2. Khi A chạy trên cung lớn BC. Gọi giao điểm của AH và (O) là A'.
   a) Chứng minh H và A' đối xứng nhau qua BC
   b) Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp ΔHAB, ΔHBC, ΔHCA luôn có bán kính không đổi.
   c) Chứng minh: AH = 2OM với M là trung điểm của BC
   d) Chứng minh ba điểm H, G, O luôn luôn thẳng hàng (G là trọng tâm ΔABC)
   e) Khi A chạy trên $\overset{\frown}{BC}$ thì H chạy trên đường nào?
   f) Gọi M, N, P là trung điểm của CB, AC, AB. Kẻ các đường thẳng Mx//OA; Ny//OB; Pz//OC. CMR: Mx, Ny, Pz luôn luôn đồng quy.
   g) Chứng minh tiếp tuyến của đường tròn $\left(I;\frac{AH}{2}\right)$ luôn luôn đi qua một điểm cố định.
   h) Chứng minh tổng $\widehat{MDF}+\widehat{MEF}$ luôn luôn không đổi.
   i) Chứng minh MF luôn luôn tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE.
   j) Chứng minh MI luôn luôn vuông góc với EF.
   k) Gọi K, L theo thứ tự là trung điểm của HB, HC. Chứng minh rằng: 9 điểm M, D, K, F, P, I, E, N, L luôn luôn cùng nằm trên một đường tròn
   l) Gọi V là giao điểm của AO với (O). Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BV tại Q. Chứng minh EQ luôn luôn song song với IM.
   m) Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T. Qua T kẻ đường thẳng song song với tiếp tuyến xy tại A cắt AB, AC theo thứ tự tại W và U. Chứng minh rằng T là trung điểm của WU.
   n) Chứng minh $\widehat{WAT}=\widehat{CAM}$
   o) Chứng minh V là trực tâm của tam giác AWU.
   p) Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác DEF theo R.
   q) Khi $BC=\frac{4R\sqrt{2}}{3}$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF theo R.
   r) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn đi qua một điểm cố định.
   s) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF thuộc một đường tròn cố định.
   t) Gọi H' là hình chiếu của H lên AM. Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác BH'C theo R.