DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP TỔNG BÌNH PHƯƠNG

TRẦN NGỌC DUY
(GV THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức, Quảng Ngãi)

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

2) $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$.

3) $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$.

4) $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_n = 0 \end{cases}$.

5) $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_n = 0 \end{cases}$.

II. CÁC ỨNG DỤNG

1. Chứng minh đẳng thức

Phương pháp. Để chứng minh $A = B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh $A - B = 0$ hoặc $A - B = C^2 = 0$.

Thí dụ 1. a) *Cho $a^2 + b^2 = 2ab$. Chứng minh rằng: $a = b$.*

b) *Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ thì $a = b = c$.*

Lời giải. a) Ta có:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b.$$

b) Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Thí dụ 2. *Tam giác có ba cạnh a, b, c thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hỏi tam giác đó là tam giác gì?*

Lời giải. Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0$$

Theo giả thiết, ta có: $a + b + c > 0$ nên

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy tam giác đó là tam giác đều.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Chứng minh rằng:

a) Nếu $(x+y)^2 = 2(x^2+y^2)$ thì $x = y$.

b) Nếu $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2$ với $x, y \neq 0$ thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$;

c) Nếu $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2$ với $x, y, z \neq 0$ thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$;

d) Nếu $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ $= 3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ thì $a = b = c$;

e) Nếu $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (y+x-2z)^2$ thì $x = y = z$.

Bài 2. a) Tam giác có ba cạnh a, b, c thỏa mãn $(b+c)^2 = 2(b^2+c^2)$ thì tam giác đó là tam giác cân.

b) Tam giác có ba cạnh a, b, c thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$ hoặc $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 3. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 2020$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x\sqrt{\frac{(y^2+2020)(z^2+2020)}{x^2+2020}} + y\sqrt{\frac{(z^2+2020)(x^2+2020)}{y^2+2020}} + z\sqrt{\frac{(x^2+2020)(y^2+2020)}{z^2+2020}}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng:

$$x^4+y^4+(x+y)^4=2\left(x^2+xy+y^2\right).$$

2. Chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp. Để chứng minh $A\ge B$, ta xét hiệu $A-B$ và chứng minh $A-B\ge 0$ hoặc $A-B=C^2\ge 0$.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng:*

a) $a^2+b^2\ge 2ab$;

b) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$;

c) $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$, với $a+b+c>0$;

d) $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$;

e) $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$.

Lời giải. a) Ta có:

$$a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b) Ta có: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0\\ b-c=0\\ c-a=0\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$

c) Ta có:

$a^3+b^3+c^3\ge 3abc \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc\ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\ge 0.$

Theo giả thiết, ta có: $a+b+c\ge 0$ nên

$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

d) Ta có: $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le 3a^2+3b^2+3c^2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

e) Ta có: $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0\\ b-c=0\\ c-a=0\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c\cdot$

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng:*

a) $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, với $a,b\ge 0$;

b) $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge\left(ax+by\right)^2$ với $xy\ne 0$;

c) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$ khi ab > 0;

d) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le -2$ khi $ab<0$;

e) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$, với $a, b, c>0$.

Lời giải. a) Ta có:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

b) Ta có: $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge\left(ax+by\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(ax+by\right)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(ay-bx\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay-bx=0\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

c) Ta có: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2-2ab}{ab}\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{(a-b)^2}{ab}\ge 0$

(luôn đúng vì $ab>0$ theo giả thiết).

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

d) Ta có: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le -2\Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2+2ab}{ab}\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{ab}\le 0$ (luôn đúng vì $ab<0$ theo giả thiết). Dấu "=" xảy ra khi $a=-b$.

e) Ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (1);

$b+c\ge 2\sqrt{bc}$ (2); $c+a\ge 2\sqrt{ca}$ (3).

Nhân vế với vế (1), (2), (3), ta được:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$;

b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$;

c) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$;

d) $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b} \ge \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$;

e) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b} \ge a+b+c$.

Bài 2. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$a^3+b^3+c^3+2abc < a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

Bài 3. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (ax+by+cz)^2$$

với mọi a,b,c,x,y,z.

Bài 4. Cho a, b, c là các số khác 0. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2 \ge 3\left(\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{yz}{bc}+\dfrac{zx}{ca}\right)$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

Bài 6. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $(a+b)^2+\dfrac{a+b}{2} \ge 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$.

Bài 7. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$;

b) $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$, với $a>0$, $b>0$;

c) $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$;

d) $a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$; e) $\dfrac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{AD}{HD}+\dfrac{BE}{HE}+\dfrac{CF}{HF} \ge 9$.

b) $\dfrac{HA}{HD}+\dfrac{HB}{HE}+\dfrac{HC}{HF} \ge 6$.

c) $\dfrac{HD}{AH}+\dfrac{HE}{BH}+\dfrac{HF}{CH} \ge \dfrac{3}{2}$.

d) $\dfrac{HA}{BC}+\dfrac{HB}{CA}+\dfrac{HC}{AB} \ge \sqrt{3}$.

e) $\cos A+\cos B+\cos C \le \dfrac{3}{2}$.

f) $\cos A.\cos B.\cos C \le \dfrac{1}{8}$.

g) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \ge \dfrac{3}{4}$.

h) $\dfrac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2} \ge 4$.

i) $\dfrac{AB.BC+BC.CA+CA.AB}{AH.AD+BH.BE+CH.CF} \le 2$.

2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh:

$$\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC} \ge 2.\frac{AB}{AC}.$$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

Phương pháp. Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2 \pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$ để biến đổi biểu thức về dạng:

- $P = a + [f(x)]^2 \ge a \Rightarrow \min P = a$ khi $f(x) = 0$.
- $Q = b - [f(x)]^2 \le b \Rightarrow \max Q = b$ khi $f(x) = 0$.

Thí dụ 1. *Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:*

a) $A = x^2+2x+2020$;

b) $B = x^2+5y^2-2xy+4y+2021$;

c) $C=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$.

Lời giải. a) Ta có: $A=x^2+2x+2020$

$=x^2+2x+1+2019=(x+1)^2+2019 \ge 2019$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $\min A = 2019 \Leftrightarrow x=-1$.

b) Ta có: $B=x^2+5y^2-2xy+4y+2021$

$=(x^2-2xy+y^2)+(4y^2+4y+1)+2020$

$=(x-y)^2+(2y+1)^2+2020 \ge 2020$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\min B = 2020 \Leftrightarrow x=y=-\dfrac{1}{2}$.

c) Ta có: $C=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{(x+1)^2}$

$$=\frac{3}{4}+\frac{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}+\left[\frac{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)}{x+1}\right]^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow \min C=\dfrac{3}{4}$.

Thí dụ 2. *Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:*

a) $D=2020-4x-4x^2$;

b) $E=2018-x^2+2x-4y^2-4y$;

c) $F=\dfrac{4x^2-6x+1}{(2x-1)^2}$.

Lời giải. a) Ta có:

$D=2020-4x-4x^2=-4x^2-4x-1+2021$
$=-(4x^2+4x+1)+2021=-(2x+1)^2+2021\leq 2021$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max D = 2021 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có: $E=2018-x^2+2x-4y^2-4y$
$=-(x^2-2x+1)-(4y^2+4y+1)+2020$
$=-(x-1)^2-(2y+1)^2+2020\leq 2020$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $\max E = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

c) Ta có: $F=\dfrac{4x^2-6x+1}{(2x-1)^2}=\dfrac{5}{4}+\dfrac{-x^2-x-\frac{1}{4}}{(2x-1)^2}$

$$=\frac{5}{4}-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{(2x-1)^2}\leq\frac{5}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}=0 \\ 2x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max F=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 3. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=2019$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:*

a) $E=a^3+b^3+c^3-3abc+2020$;

b) $F=\dfrac{ab}{3c}+\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{ca}{3b}$;

c) $G=\dfrac{a^3+b^3}{2ab}+\dfrac{b^3+c^3}{2bc}+\dfrac{c^3+a^3}{2ca}$.

Lời giải. a) Ta có:

$E=a^3+b^3+c^3-3abc+2020$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+2020$
$=2019(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+2020$
$=\dfrac{2019}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+2020\geq 2020$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{2019}{3}=673$.

Vậy $\min E = 2020 \Leftrightarrow a=b=c=673$.

b) Ta có: $F=\dfrac{ab}{3c}+\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{ca}{3b}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{ab}{c}.\dfrac{bc}{a}}=2b$ (vì $a,\ b,\ c>0$).

Tương tự ta cũng có: $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\geq 2c$, $\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\geq 2a$. Suy ra $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\geq a+b+c$

nên: $F\geq\dfrac{1}{3}(a+b+c)=\dfrac{1}{3}.2019=673$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{2019}{3}=673$.

Vậy $\min F = 673 \Leftrightarrow a=b=c=673$.

c) Ta có: $G=\dfrac{a^3+b^3}{2ab}+\dfrac{b^3+c^3}{2bc}+\dfrac{c^3+a^3}{2ca}$

$$=\frac{a^2}{2b}+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^2}{2c}+\frac{c^2}{2b}+\frac{c^2}{2a}+\frac{a^2}{2c}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta được:

$$\frac{a^2}{2b}+\frac{c^2}{2b}\ge 2\sqrt{\frac{a^2c^2}{4b^2}}=\frac{ac}{b} \text{ (vì } a,b,c>0\text{).}$$

Tương tự: $\dfrac{b^2}{2a}+\dfrac{c^2}{2a}\ge\dfrac{bc}{a}$; $\dfrac{a^2}{2c}+\dfrac{b^2}{2c}\ge\dfrac{ab}{c}$.

Suy ra:

$$G=\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}$$
$$\ge a+b+c=2019.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{2019}{3}=673$. Vậy $\min G=2019 \Leftrightarrow a=b=c=673$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = 5x^2 + 10x + 1930$;

b) $B = x^2 + 5y^2 - 2xy + 4y + 1945$;

c) $C = x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x - 22y + 1975$;

d) $D = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2)$;

e) $E=\dfrac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}$; $F=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}$;

f) $G=\dfrac{x^2-2x+2020}{x^2}$; $H=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = -9x^2 + 6x - 20$;

b) $B = -x^2 + 2x - y^2 - 4y - 4z^2 + 4z + 11$;

c) $C = -x^2 - 26y^2 + 10xy - 14x + 76y + 1982$;

d) $D = 2020 - (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$;

e) $E=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$; b) $B=\dfrac{3-4x}{x^2+1}$; c) $C=\dfrac{27-12x}{x^2+9}$;

d) $D=\dfrac{8x+3}{4x^2+1}$; e) $E=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$; f) $F=\dfrac{3x^2-2x+3}{x^2+1}$;

g) $G=\dfrac{2010x+2680}{x^2+1}$; h) $H=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x+3}$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

$$H= a^3+b^3+c^3-3abc+1941,$$

với $a+b+c=-1911$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{6057}$. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $P=\dfrac{2020a}{\sqrt{a^2+2019}}+\dfrac{2020b}{\sqrt{b^2+2019}}+\dfrac{2020c}{\sqrt{c^2+2019}}$;

b) $Q=\dfrac{2bc}{\sqrt{a^2+2019}}+\dfrac{2ca}{\sqrt{b^2+2019}}+\dfrac{2ab}{\sqrt{c^2+2019}}$.

Bài 6. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a+b+c=1941$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}$.

Bài 7. Cho a, b, c là các số âm thỏa mãn $a+b+c=-1941$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $L=\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}$.

Bài 8. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=2022$. Tìm giá trị nhỏ nhất của của biểu thức: $M=\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}$.

4. Chứng minh biểu thức luôn dương (âm) với mọi biến của biểu thức

Phương pháp. Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$ để biến đổi biểu thức về các dạng sau:

- $P = a + [f(x)]^2 > 0$ $(a > 0)$ suy ra $P > 0$ với mọi x.
- $Q = b - [f(x)]^2 < 0$ $(b < 0)$ suy ra $Q < 0$ với mọi x.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng:*

a) $A = 2x^2 - 4x + 3 > 0$ với mọi x;

b) $B = x^2 - xy + y^2 + 1941 > 0$ với mọi x, y;

c) $C = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15{,}5 > 0$ *với mọi x, y, z.*

Lời giải. a) Ta có: $A = 2x^2 - 4x + 3$

$= 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2(x-1)^2 + 1 > 0.$

Vậy $A > 0$ với mọi x.

b) Ta có: $B = x^2 - xy + y^2 + 1941$

$$= x^2 - 2x.\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 + 1941$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1941 > 0.$$

Vậy $B > 0$ với mọi x, y.

c) Ta có: $C = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15{,}5$

$= (x^2 - 2x + 1)^2 + 4(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 6z + 9) + 1{,}5$

$= (x-1)^2 + 4(y+1)^2 + (z-3)^2 + 1{,}5 > 0.$

Vậy $C > 0$ với mọi x, y, z.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng:*

a) $A = -x^2 - 27 + 2x < 0$ *với mọi x;*

b) $B = 4xy - 4x^2 - y^2 - 1947 < 0$ *với mọi x, y;*

c) $C = xy + 3y + 2z - 5 - x^2 - y^2 - z^2 < 0$ *với mọi x, y, z.*

Lời giải.

a) Ta có: $A = -x^2 - 27 + 2x = -(x^2 - 2x + 1) - 26$

$= -(x-1)^2 - 26 < 0.$

Vậy $A < 0$ với mọi x.

b) Ta có: $B = 4xy - 4x^2 - 2020y^2 - 1947$

$= -(4x^2 - 4xy + y^2) - 2019y^2 - 1947$

$= -(2x - y)^2 - 2019y^2 - 1947 < 0.$

Vậy $B < 0$ với mọi x, y.

c) Ta có: $C = xy + 3y + 2z - 5 - x^2 - y^2 - z^2$

$$= -\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}y^2 - 3y + 3\right) - \left(z^2 - 2z + 1\right) - 1$$

$$= -\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 - (z-1)^2 - 1 < 0.$$

Vậy $C < 0$ với mọi x, y, z.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Chứng minh rằng:

a) $A = x^2 - 6x + 2019 > 0$ với mọi x;

b) $B = x^2 + 5y^2 + 2x - 4xy - 10y + 2020 > 0$ với mọi x, y;

c) $C = 5x^2 + 10y^2 - 6xy - 4x - 2y + 2021 > 0$ với mọi x, y;

d) $D = x^2 + 26y^2 + 10xy + 14x - 76y + 2022 > 0$ với mọi x, y;

e) $E = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x - 6z + 8y + 3 > 0$ với mọi x, y, z.

Bài 2. Chứng minh rằng:

a) $A = -16x^2 + 8x - 2019 < 0$ với mọi x;

b) $B = -x^2 + 2x - y^2 + 8y + 5 < 0$ với mọi x, y;

c) $C = -5x^2 - 26y^2 + 10xy - 14x + 76y - 19 < 0$ với mọi x, y;

d) $D = -y^4 - (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) - z^2 - 1 < 0$ với mọi x, y, z.

5. Giải phương trình

Phương pháp. Biến đổi đưa phương trình về dạng: $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_n = 0 \end{cases}$

hoặc $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$.

Thí dụ 1. *Giải các phương trình sau:*

a) $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$ (1);

b) $4\sqrt{2x-1} = 4x^2 - 12x + 4$ (2);

c) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4z^2 - 4z + 6 = 0$ (3).

Lời giải. a) ĐK: $x \geq \frac{-10}{3}$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + 3x + 10 - 2\sqrt{3x+10} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + \left(\sqrt{3x+10} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow x = -3$$

(thỏa mãn ĐK). Vậy $S = \{-3\}$.

b) ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow 4(2x-1)+4\sqrt{2x-1}+1=4x^2-4x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}+1\right)^2=(2x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sqrt{2x-1}+1=2x-1 & (*) \\ 2\sqrt{2x-1}+1=1-2x & (**) \end{array}\right.$$

(**) vô nghiệm, giải (*) ta được $x=2+\sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐK). Vậy $S=\left\{2+\sqrt{2}\right\}$.

c) $(3) \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(4z^2-4z+1)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(2z-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \\ 2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2. \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y;z)=\left(1;-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình nghiệm nguyên:*

a) $x^2-2xy+2y^2+8yz+16z^2=2019$ (1);

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}+\sqrt{z-5}=\dfrac{1}{2}(x+y+z-7)$ (2).

Lời giải. a) $(1) \Leftrightarrow (x-y)^2+(y+4z)^2=2019$.

Ta có $(x-y)^2$ và $(y+4z)^2$ là số chính phương nên $(x-y)^2$ và $(y+4z)^2$ chia cho 4 dư 0 hoặc 1. Suy ra $(x-y)^2+(y+4z)^2$ chia cho 4 dư 0, 1 hoặc 2. Mà 2019 chia cho 4 dư 3. Do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) ĐK: $\begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 3. \\ z\ge 5 \end{cases}$ Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow x+y+z-7-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{y-3}-2\sqrt{z-5}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2-2\sqrt{x-2}+1\right)+\left(y-3-2\sqrt{y-3}+1\right)+\left(z-5-2\sqrt{z-5}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-5}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}-1=0 \\ \sqrt{y-3}-1=0 \\ \sqrt{z-5}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=6 \end{cases}$$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x;y;z)=(3;4;6).$$

Bài tập vận dụng

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$;

b) $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$;

c) $\sqrt{3x-2}=-4x^2+21x-22$;

d) $x^4+\sqrt{x^2+3}-3=0$;

e) $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$;

f) $(x+3)\sqrt{(4-x)(x+12)}=28-x$;

g) $(x+3)\sqrt{x^2+1}=x^2+3x+1$;

h) $(x+1)\sqrt{x^2-3x+3}=x^2-2x+3$;

i) $4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}=4x^2+3x+3$;

j) $\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}=1+x-2x^2$;

Bài 2. Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2+2xy+2y^2-10yz+25z^2=2023$;

b) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+6=0$;

c) $x^2+y^2+z^2=xy+3y+2z-4$;

d) $(x+y+1)^2=3(x^2+y^2+1)$;

e) $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$;

Bài 3. Nếu phương trình $x^2+a_1x+b_1=0$ và phương trình $x^2+a_2x+b_2=0$ có nghiệm chung thì phương trình $x^2+(a_1+a_2)x+b_1+b_2=0$ luôn có nghiệm.

Bài 4. Cho các phương trình $ax^2+2bx+c=0$; $bx^2+2cx+a=0$; $cx^2+2ax+b=0$, trong đó a, b, c khác 0. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các phương trình trên có nghiệm.

Bài 5. Cho phương trình $x^2-2mx+2m-3=0$ (1).

1) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

2) Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của

$$B = 2020 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2.$$

Bài 6. Cho phương trình:

$$x^2 + (m-1)x + 2m - 6 = 0 \quad (2)$$

1) Chứng minh rằng phương trình (2) luôn có nghiệm với mọi m.

2) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của:

$$D = 2021 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2.$$