ỨNG DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. ***Phương trình bậc hai ẩn x là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$***

2.Công thức nghiệm phương trình bậc hai dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ **(1)**

a) *Giải với* Δ*:*

Tính Δ: $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

+ Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

b) *Giải với* Δ'*:*

Nếu b = 2b' $\Rightarrow b' = \dfrac{b}{2} \Rightarrow \Delta' = (b')^2 - ac$.

+ Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

+ Nếu $\Delta' = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a}$.

+ Nếu $\Delta' < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện để phương trình (1)

- *Vô nghiệm* $\Leftrightarrow \Delta < 0\ (\Delta' < 0)$
- *Có nghiệm kép* $\Leftrightarrow \Delta = 0\ (\Delta' = 0)$
- *Có nghiệm* $\Leftrightarrow \Delta \geq 0\ (\Delta' \geq 0)$
- *Có hai nghiệm* $\Leftrightarrow \Delta \geq 0\ (\Delta' \geq 0)$
- *Có hai nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta > 0\ (\Delta' > 0)$
- *Có hai nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow P < 0$
- *Có hai nghiệm cùng dấu* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ (\Delta') \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- *Có hai nghiệm cùng dương* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ (\Delta') \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- *Có hai nghiệm cùng âm* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ (\Delta') \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

- *Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ (\Delta') > 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- *Có hai nghiệm phân biệt cùng dương* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ (\Delta') > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- *Có hai nghiệm phân biệt cùng âm* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ (\Delta') > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

3. Hệ thức Vi ét và ứng dụng:

a) Định lý: Nếu x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

b) Định lý đảo: Nếu $\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$

$\Rightarrow$ u, v là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ (ĐK: $S^2 - 4P \geq 0$).

**** Một số hệ thức khi áp dụng hệ thức Vi-ét:***

+ Tổng bình phương các nghiệm: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$.

+ Tổng nghịch đảo các nghiệm: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P}$.

+ Tổng nghịch đảo bình phương các nghiệm: $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2} = \dfrac{S^2 - 2P}{P^2}$.

+ Bình phương của hiệu các nghiệm: $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$.

+ Tổng lập phương các nghiệm: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$

II. CÁC ỨNG DỤNG

1.Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

Phương pháp.

Để tìm GTNN, GTLN của biểu thức ta áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$) . Dấu "=" xảy ra khi phương trình có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$ $\left(x = -\dfrac{b'}{a}\right)$.

Thí dụ 1. Tìm GTNN của biểu thức:

a) $A = 5x^2 - 4x + 7$

b) $B = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

c) $C = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Lời giải.

a) Gọi a là một giá trị của biểu thức A . Biểu thức A nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình $5x^2 - 4x + 1 = a$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 5x^2 - 4x + 7 - a = 0$ (1) có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 5a - 7 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \dfrac{7}{5}$

Vậy minA = $\dfrac{7}{5} \Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép x = $\dfrac{2}{5}$

b) ĐKXĐ: x $\neq 1$

Gọi a là một giá trị của B , phương trình $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = a$ (2) phải có nghiệm

PT (2) $\Leftrightarrow (a-1)x^2 - (2a-1)x + (a-1) = 0$ (3)

- Nếu a = 1 thì x = 0
- Nếu a $\neq 1$ thì (3) là phương trình bậc hai

  $\Delta = (2a-1)^2 - 4(a-1)^2 = 4a - 3$

  PT (3) có nghiệm $4a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \dfrac{3}{4}$

Vậy minB = $\dfrac{3}{4}$ khi PT (3) có nghiệm kép x = -1

c) ĐKXĐ: x $\in$ R

Gọi a là một giá trị của C, phương trình $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = a$ (4) phải có nghiệm

PT (4) $\Leftrightarrow (1-a)x^2 - (1+a)x + 1 - a = 0$ (5)

- Nếu a = 1 thì x =0
- Nếu a $\neq 1$ thì (5) là phương trình bậc hai

  $\Delta = (1+a)^2 - 4(1-a)^2 = -3a^2 + 10a - 3$

  PT (5) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = -3a^2 + 10a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq a \leq 3$

Vậy minC = $\dfrac{1}{3}$ khi PT (5) có nghiệm kép x = 1

Thí dụ 2. Tìm GTLN của biểu thức:

a) D = $-7x^2 + 5x + 1954$

b) E = $\dfrac{2x+1}{x^2+2}$

c) $F = \dfrac{x}{(x+2020)^2}$

Lời giải.

a) Gọi a là một giá trị của biểu thức E .
Biểu thức E nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình $-7x^2 + 5x + 1954 = a$ có nghiệm
$\Leftrightarrow -7x^2 + 5x + 1954 - a = 0$ (1) có nghiệm
$\Leftrightarrow \ \Delta = -28a + 54737 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{54737}{28}$
Vậy maxE = $\frac{54737}{28} \Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép x = $\frac{5}{14}$

b) ĐKXĐ: $x \in R$
Gọi a là một giá trị của E , phương trình $\frac{2x+1}{x^2+2} = a$ (2) phải có nghiệm
PT (2) $\Leftrightarrow ax^2 - 2x + 2a - 1 = 0$ (3)
- Nếu a = 0 thì x = $\frac{-1}{2}$
- Nếu a $\neq 0$ thì (3) là phương trình bậc hai
$\Delta' = -2a^2 + a + 1$
PT (3) có nghiệm khi $-2a^2 + a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

Vậy maxE = 1 khi PT (3) có nghiệm kép x = 1

c) ĐKXĐ: $x \in R$

Gọi a là một giá trị của F, phương trình $\frac{x}{(x+2020)^2} = a$ (4) phải có nghiệm

PT (4) $\Leftrightarrow ax^2 + (2.2020a - 1)x + 2020^2 a = 0$ (5)
- Nếu a = 0 thì x = 0
- Nếu a $\neq 0$ thì (5) là phương trình bậc hai

$\Delta = (2.2020a - 1)^2 - 4a2020^2 a = -4.2020a + 1$

PT (5) có nghiệm $-4.2020a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4.2020} = \frac{1}{8040}$

Vậy maxF = $\frac{1}{8040}$ khi PT (5) có nghiệm kép x = 2020

Thí dụ 3. Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau:
a) Q = $\frac{4x-3}{x^2+1}$ b) K = $\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+3}$

Lời giải.
a) ĐKXĐ: $x \in R$
Gọi a là một giá trị của Q , phương trình $\frac{4x-3}{x^2+1} = a$ (1) phải có nghiệm

PT (1) $\Leftrightarrow ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ (2)

- Nếu a = 0 thì PT (2) là -4x = -3 có nghiệm x = $\frac{3}{4}$
- Nếu a $\neq 0$ thì (2) là phương trình bậc hai
  $\Delta' = 4 - a(a+3) = -a^2 - 3a + 4$
  PT (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -a^2 - 3a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 1$

Vậy: minQ = -4 khi PT (2) có nghiệm kép x = $\frac{-1}{2}$

maxQ = 1 khi PT (2) có nghiệm kép x = 2

b) ĐKXĐ: x $\in$ R

Gọi a là một giá trị của K , phương trình $\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+3} = a$ (3) phải có nghiệm

PT (3) $\Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(a+1)x + (3a+1) = 0$ (4)

- Nếu a = 1 thì PT (2) là -4x = -4 có nghiệm x = 1
- Nếu a $\neq 1$ thì (2) là phương trình bậc hai
  $\Delta' = (a+1)^2 - (a-1)(3a+1) = -2a^2 + 4a + 2$
  PT (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -2a^2 + 4a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2}$

Vậy: minK = $1 - \sqrt{2}$ khi PT (4) có nghiệm kép x = $1 - \sqrt{2}$

maxK = $1 + \sqrt{2}$ khi PT (4) có nghiệm kép x = $1 + \sqrt{2}$

Thí dụ 4. Tìm cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình: $3x^2 - 6x + y - 2 = 0$ (1) sao cho y đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Xét phương trình bậc hai , ẩn x tham số y.

Nếu tồn tại cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình (1) thì PT (1) phải có nghiệm.

Do đó $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 3(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 5$

Vậy max y = 5 khi PT (1) có nghiệm kép x =1

Nên cặp số cần tìm là (1; 5)

Thí dụ 5. Tìm các cặp nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy + y^2 = x - y$ (1)

Lời giải.

Xét phương trình bậc hai , ẩn x tham số y.

$x^2 - (y+1)x + (y^2 + y) = 0.$

Ta có $\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 + y) = -3y^2 - 2y + 1$

Nếu tồn tại cặp số (x,y) thỏa mãn phương trình (1) thì PT (1) phải có nghiệm.

Do đó $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{3}$

Vì y nguyên nên $y \in \{-1; 0\}$

+Với y = 0 thì $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}$

+ Với y = -1 thì $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $(x; y) \in \{(0;0);(1;0);(0;-1)\}$

Thí dụ 6. Tìm x để biểu thức M = $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

ĐKXĐ: x ≥ 0

M = $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1} \Rightarrow Mx - M\sqrt{x} + M - \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow Mx - (M+1)\sqrt{x} + M - 1 = 0 \ (1)$

- Nếu M = 0 thì x $\in \varnothing$

- Nếu M $\neq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta_M \geq 0 \Leftrightarrow (M+1)^2 - 4M(M-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -3M^2 + 6M + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq M \leq \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$

Mà M là số nguyên nên M$\in \{0;1;2\} \Rightarrow x \in \left\{0;\dfrac{1}{4};1;4\right\}$

Vậy $x \in \left\{0;\dfrac{1}{4};1;4\right\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

2. Chứng minh biểu thức bậc hai luôn dương (âm) với mọi biến của biểu thức.

Phương pháp.

+ Để chứng minh *$ax^2 + bx + c > 0$ với mọi giá trị của x thì ta chứng tỏ a > 0 và* $\Delta\,(\Delta') < 0$

+ Để chứng minh *$ax^2 + bx + c < 0$ với mọi giá trị của x thì ta chứng tỏ a < 0 và* $\Delta\,(\Delta') < 0$

***Thí dụ 1**. Chứng minh rằng các biểu thức: a) A = $19x^2 - 5x + 1 > 0$ với mọi giá trị của x*

b) B = $-25x^2 + 8x - 1911 < 0$ *với mọi giá trị của x*

Lời giải.

a) Ta có a = 19 > 0 và $\Delta = (-5)^2 - 4.19.1 = 25 - 76 = -51 < 0$

Vậy *A = $19x^2 - 5x + 1 > 0$ với mọi giá trị của x.*

b) Ta có a = -25 < 0 và $\Delta = 8^2 - 4.25.1911 = 64 - 191100 = -19036 < 0$

Vậy B = $-25x^2 + 8x - 1911 < 0$ *với mọi giá trị của x*

***Thí dụ 2**. Tìm m để các biểu thức:*

a) C = $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 > 0$ với mọi giá trị của x

b) D = $mx^2 - 6(m-1)x + 9(m-3) > 0$ với mọi giá trị của x

c) E = $-3x^2 + mx - m^2 + 2m < 0$ với mọi giá trị của x

d) F = $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 < 0$ với mọi giá trị của x

Lời giải.

a) Để C > 0 với mọi giá trị của x thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \left[-(m-1)\right]^2 - m^2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2m + 2 < 0 \Leftrightarrow m > 1$

Vậy m > 1 thì C > 0 với mọi giá trị của x.

b) Để D > 0 với mọi giá trị của x thì

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[-3(m-1)\right]^2 - m.9(m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 9m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Vậy m > 0 thì D > 0 với mọi giá trị của x.

c) Để E < 0 với mọi giá trị của x thì

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ m^2 - 4.(-3)(-m^2 + 2m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -11m^2 + 24m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{24}{11}$$

Vậy $0 < m < \frac{24}{11}$ thì E < 0 với mọi giá trị của x.

d) Để F > 0 với mọi giá trị của x thì

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 < 0 \\ \left[-(m-1)\right]^2 - (m+1)(m-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ -m + 3 < 0 \end{cases} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$$

Vậy không có giá trị m nào để F < 0 với mọi giá trị của x.

3. Phân tích thành nhân tử.

Phương pháp.

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Do đó ta giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ rồi mới phân tích

Thí dụ. Phân tích thành nhân tử các đa thức sau:

a) $x^2 - 8x - 9$
b) $3x^2 - 4x + 1$
c) $-2020x^2 + x + 2021$

Lời giải.

a) Ta có $x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 9 \end{array}\right.$ nên $x^2 - 8x - 9 = 1(x + 1)(x - 9) = (x + 1)(x - 9)$

b) Ta có $3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right.$ nên $3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x-1)(3x-1)$

c) Ta có $-2020x^2 + x + 2021 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{2021}{2020} \end{array}\right.$ nên $-2020x^2 + x + 2021 = -2020(x+1)\left(x - \dfrac{2021}{2020}\right)$

$$= (x+1)(-2020x+2021)$$

4.Chứng minh phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của tham số m:

Phương pháp.

+ Điều kiện $a \neq 0$

+ Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).

+ Biến đổi Δ' đưa về dạng : $\Delta' = (A \pm B)^2 + c > 0, \forall m$ (với c là một số dương)

+ Kết luận: Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi tham số m.

Thí dụ . Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ .Chứng minh rằng phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Lời giải. Ta có $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0, \forall m$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi tham số m.

5.Tìm điều kiện phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm phân biệt với giá trị của tham số m:

* *Phương pháp.*

+ Điều kiện $a \neq 0$

+ Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).

+ Cho $\Delta' > 0$ (hoặc $\Delta > 0$). Giải bất phương trình ẩn là m

+ Kết hợp điều kiện rồi kết luận

Thí dụ . Tìm m để phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt.

a) $(m+2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

b) $x^2 + 2(m-1)x - 2m + 5 = 0$

Lời giải.

a) Điều kiện: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Ta có $\Delta' = m^2 - (m+2)(m+3) = -5m - 6$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -5m - 6 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{-6}{5}$

Vậy $m < \dfrac{-6}{5}$ và $m \neq -2$ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt .

b) Điều kiện: $a \neq 0 \Leftrightarrow a = 1 \neq 0$

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - 1.(-2m+5) = m^2 - 4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt .

6. Chứng minh phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm (có nghiệm) với mọi giá trị của tham số m:

* *Phương pháp.*

+ Điều kiện $a \neq 0$
+ Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).
+ Biến đổi Δ' đưa về dạng : $\Delta' = (A \pm B)^2 \geq 0, \forall m$
+ Kết luận: Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm với mọi tham số m.

Thí dụ . Cho phương trình $3x^2 - (m+1)x + m + 2 = 0$ .Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi m.

Lời giải. Ta có $\Delta = (m + 1)^2 - 4.3(m + 2) = (m - 5)^2 \geq 0, \forall m$
Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm với mọi tham số m.

7.Tìm điều kiện phương trình bậc hai có hai nghiệm (có nghiệm) với mọi giá trị của tham số m:

* *Phương pháp.*

+ Điều kiện $a \neq 0$
+ Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).
+ Cho $\Delta' \geq 0$ (hoặc $\Delta \geq 0$). Giải bất phương trình ẩn là m
+ Kết hợp điều kiện rồi kết luận

Thí dụ . Tìm m để phương trình sau luôn có hai nghiệm.

a) $(m + 1)x^2 - 2mx + m + 5 = 0$

b) $-x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 5 = 0$

Lời giải.

a) Điều kiện: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Ta có $\Delta' = m^2 - (m + 1)(m + 5) = -6m - 5$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -6m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{-5}{6}$

Vậy $m \leq \frac{-5}{6}$ và $m \neq -1$ phương trình đã cho luôn có nghiệm .

b) Điều kiện: $a \neq 0 \Leftrightarrow a = -1 \neq 0$

Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - (-1).(2m + 2) = m^2 + 4m + 3$

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq -1 \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq -1 \end{array}\right.$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm.

8. Biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ theo tham số m:

* *Phương pháp .*

Xét hai trường hợp.

TH1. a = 0 thì ta giải phương trình dạng bx + c = 0.
TH2.a $\neq 0$ thì ta thực hiện như sau:

- Lập biệt thức Δ' (hoặc Δ).
- Biện luận:

+ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi: $\Delta' > 0$ $\rightarrow$ giải bất phương trình $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.
+ Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta' = 0$ $\rightarrow$ giải phương trình $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.
+ Phương trình vô nghiệm khi $\Delta' < 0$ $\rightarrow$ giải bất phương trình $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.
+ Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$ $\rightarrow$ giải bất phương trình $\rightarrow$ tìm tham số m $\rightarrow$ kết luận.

Thí dụ 1. Giải và biện luận phương trình: $(m + 1)x^2 - 2mx + m + 5 = 0$ (1)

Lời giải.
- Nếu a = 0 $\Leftrightarrow$ m + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = -1 thì phương trình (1) $\Leftrightarrow$ 2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -2
Vậy m = -1 thì phương trình (1) có một nghiệm x = -2
- Nếu a $\neq 0$ $\Leftrightarrow$ m + 1 $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ m $\neq$ -1 thì phương trình (1) là phương trình bậc hai
Ta có $\Delta' = m^2 - (m + 1)(m + 5) = -6m - 5$

+ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -6m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{-5}{6}$

Vậy $m < \frac{-5}{6}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{m + \sqrt{-6m-5}}{m+1}$, $x_2 = \frac{m - \sqrt{-6m-5}}{m+1}$

+ Phương trình (1) có nghiệm kép khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow -6m - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -5$

+ Phương trình (1) vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > \frac{-5}{6}$

+ Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{-5}{6}$

Thí dụ 2. Cho Parabol $y = -x^2$ (P) và đường thẳng y = 4mx + m + 3. Tìm m để :

a) (d) tiếp xúc với (P)
b) (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt
c) (d) không cắt (P).

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) là: $-x^2 = 4mx + m + 3 \Leftrightarrow x^2 + 4mx + m + 3 = 0$ (1)
Ta có $\Delta' = 4m^2 - m - 3$

a) Để (d) tiếp xúc với (P) thì phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{-3}{4} \end{array}\right.$$

Vậy m = 1 hoặc m = $\frac{-3}{4}$ thì (d) tiếp xúc với (P).

b) Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < \dfrac{-3}{4} \end{array}\right.$$

Vậy m > 1 hoặc m < $\dfrac{-3}{4}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c) Để (d) không cắt (P) thì phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{4} < m < 1$$

Vậy $\dfrac{-3}{4} < m < 1$ thì (d) không cắt (P).

9. Không giải phương trình bậc hai tính giá trị biểu thức có chứa tổng, hiệu, tích của hai nghiệm

Phương pháp.

+ Tính $\Delta\ (\Delta')$ và kiểm tra $\Delta\ (\Delta') \geq 0$?

+ Áp dụng hệ thức Viet $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

+ Biến đổi biểu thức về dạng tổng, tích x_1, x_2.

Thí dụ. Cho phương trình $x^2 - 12x + 35 = 0$ (1).Không giải phương trình. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $x_1^2 + x_2^2$. b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$. c) $(x_1 - x_2)^2$ d) $x_1^3 + x_2^3$

Lời giải.

Phương trình có $\Delta' = 1 > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm, áp dụng hệ thức Vi-ét cho pt (1): $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 12 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 35 \end{cases}$.

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = 12^2 - 2.35 = 74$.

b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P} = \dfrac{12}{35}$.

c) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P = 12^2 - 4.35 = 4$.

d) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS = 12^3 - 3.35.12 = 468$.

10.Tìm hệ thức giữa hai nghiệm độc lập đối với tham số:*(Tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số).*

* *Phương pháp.*

+ Tìm điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm ($\Delta' \geq 0 ; \Delta \geq 0$).

+ Lập hệ thức Vi-ét cho phương trình $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

+ Khử tham số (bằng phương pháp cộng đại số) tìm hệ thức liên hệ giữa S và P $\rightarrow$ Đó là hệ thức độc lập với tham số.

Thí dụ . Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ (1) (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc vào m.

***Lời giải*.**

Phương trình (1) có $\Delta = b^2 - 4ac = + (2m - 1)^2 - 4.2.(m - 1) = 4m^2 - 12m + 9 = (2m - 3)^2 \geq 0, \ \forall$ m.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi-ét cho phương trình (1): $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2m+1}{2} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S = -2m+1 \\ 2P = m-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2S = -2m+1 \\ 4P = 2m-2 \end{cases} \Rightarrow 2S + 4P = -1$. Hay: $2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 = -1$: Đây là hệ thức cần tìm.

11. Tìm giá trị của tham số m của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$) ẩn x, tham số m để biểu thức chứa x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện cho trước.

* *Phương pháp.*

+ Đặt điều kiện cho tham số để phương trình (1) đã cho có nghiệm ($\Delta' \geq 0 ; \Delta \geq 0$).

+ Lập hệ thức Vi-ét cho phương trình $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

+ Biến đổi biểu thức chứa x_1, x_2 về dạng tổng, tích x_1, x_2 và kết hợp hệ thức Vi-ét. Tìm m.

+ Đối chiếu điều kiện để phương trình (1) có nghiệm. Trả lời

Thí dụ 1. Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ (1) (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1).

a) Tìm m để A = $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

b) Tìm m để B = $10 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Tìm $m \in$ **Z** để C = $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

d) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = \frac{1}{4}$

***Lời giải*.**

Phương trình (1) có $\Delta = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - .2.(m-1) = 4m^2 - 12m + 9 = (2m-3)^2 \geq 0,\ \forall$ m.
Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi-ét cho phương trình (1): $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2m+1}{2} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S = -2m+1 \\ 2P = m-1 \end{cases}$

Ta có A = $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\dfrac{-2m+1}{2}\right)^2 - m + 1 = m^2 - 2m + \dfrac{5}{4} \geq (m-1)^2 + \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Nên minA = $\frac{1}{4}$ khi m = 1.

b) Ta có B = $10 - x_1^2 - x_2^2 = 10 - \left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right] = 10 - \left(\dfrac{-2m+1}{2}\right)^2 + m - 1 = -m^2 + 2m + \dfrac{35}{4}$

$$= -(m-1)^2 + 9\frac{3}{4} \leq 9\frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi m = 1 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy MaxB = $9\frac{3}{4} \Leftrightarrow m = 1$

c)Ta có C = $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \dfrac{-2m+1}{m-1} = -2 - \dfrac{1}{m-1}$.

Nên để C nhận giá trị nguyên thì $m - 1 \in$ Ư(1) = {-1; 1}
+ Nếu m - 1 = -1 $\Rightarrow$ m = 0 (TMĐK)
+ Nếu m – 1 = 1 $\Rightarrow$ m = 2 (TMĐK)
Vậy m = 0 hoặc m = 2 thì C nhận giá trị nguyên.

d) Ta có $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 6x_1x_2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{-2m+1}{2}\right)^2 - 3m + 3 = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$(TMĐK)

Vậy m = 1 hoặc m = 3 thì $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = \dfrac{1}{4}$

Thí dụ 2. Cho phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 2m + 2 = 0$ (2) (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2) .

a) Tìm m để D = $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

b) Tìm m để E = $2017 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Tìm m để F = $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

d) Tìm m để $x_1^3 + x_2^3 = 2$

Lời giải.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 2m + 2) = -4m + 1$. Nên phương trình (2) có nghiệm khi

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{4}$ .Khi đó theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2m - 3 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 - 2m + 2 \end{cases}$

a) Ta có D = $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m - 3)^2 - 2(m^2 - 2m + 2) = 2m^2 - 8m + 5$

-Bạn Dũng giải như sau: Ta có D = $2m^2 - 8m + 5 = 2(m^2 - 4m + 4) - 3 = 2(m - 2)^2 - 3 \geq -3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ m – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 2.

Vậy min D = -3 $\Leftrightarrow$ m = 2.

-Bạn Lan giải như sau: Ta có D = $2m^2 - 8m + 5 = 2(m^2 - 4m + 4) - 3 = 2(m - 2)^2 - 3 \geq -3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ m – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 2 (không thỏa mãn điều kiện). Do đó không có giá trị m để D = $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận xét lời giải hai bạn Dũng và Lan?

Bạn Dũng và bạn Lan giải như trên là sai . Do đó ta có lời giải đúng như sau:

Ta có D = $2m^2 - 8m + 5 = 2\left(m - \dfrac{1}{4}\right)^2 - 7\left(m - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{25}{8} \geq \dfrac{25}{8}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$. Vậy minD = $\frac{25}{8} \Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$.

Cách khác: Thế $m=\frac{1}{4}$ vào $D=2m^2-8m+5$ thì D = $\frac{25}{8}$ .Vậy minD = $\frac{25}{8} \Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$.

b) -Bạn Dũng giải như sau: Ta có $E=2017-x_1^2-x_2^2=2017-(2m^2-8m+5)=-2(m-2)^2+2020\le 2020$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ m – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 2.

Vậy maxE = 2020 $\Leftrightarrow$ m = 2.

-Bạn Lan giải như sau: Ta có $E=2017-x_1^2-x_2^2=2017-(2m^2-8m+5)=-2(m-2)^2+2020\le 2020$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ m – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 2. (không thỏa mãn điều kiện). Do đó không có giá trị m để $E=2017-x_1^2-x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Nhận xét lời giải hai bạn Dũng và Lan?

Bạn Dũng và bạn Lan giải như trên là sai . Do đó ta có lời giải đúng như sau:

Ta có $E=2017-x_1^2-x_2^2=2017-(2m^2-8m+5)=2017-\left[2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2-7\left(m-\frac{1}{4}\right)+\frac{25}{8}\right]$

$=-2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+7\left(m-\frac{1}{4}\right)+\frac{16111}{8}\le\frac{16111}{8}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$. Vậy maxE = $\frac{16111}{8} \Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$

c) Ta có $F=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2m-3}{m^2-2m+2}$

$\Rightarrow F(m^2-2m+2)=2m-3 \Leftrightarrow Fm^2-2(F+1)m+2F+3=0\ (1)$

- Nếu F = 0 thì m = $\frac{3}{2}$

- Nếu F $\neq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta' \ge 0$

$\Leftrightarrow (F+1)^2-F(2F+3)=-F^2-F+1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le F\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Mà F là số nguyên thì $F\in\{-1;0\}$ nên suy ra $m\in\left\{-1;1;\frac{3}{2}\right\}$. Kết hợp với điều kiện $m\le\frac{1}{4}$.

Do đó m = -1 thì F mới nhận giá trị nguyên.

d) Ta có $x_1^3+x_2^3=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \Leftrightarrow (2m-3)^3-3(2m-3)(m^2-2m+2)=2$

$\Leftrightarrow 2m^3 - 15m^2 + 24m - 11 = 0 \Leftrightarrow (2m-11)(m-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{11}{2} \end{array}\right.$ không thỏa mãn điều kiện có nghiệm của phương trình. Do đó không có giá trị m nào để $x_1^3 + x_2^3 = 2$

Thí dụ 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m + 3 = 0$ (3) (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (3).

a) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b)Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $G = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

c) Tìm m để $H = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Tìm m để $I = 3x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Phương trình (3) có nghiệm khi $\Delta' = b'^2 - ac = (m + 1)^2 - 1.(m + 3) = m^2 + m - 2 \geq 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$

Khi đó theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2(m+1) \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m+3 \end{cases}$

a)Ta có A = $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(m+3) = 8$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-5}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy m = 1 hoặc $m = \dfrac{-5}{2}$ thì A = $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) $G = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{2m+2}{m+3} = 2 - \dfrac{4}{m+3}$

Để G nhận giá trị nguyên thì $m + 3 \in Ư(4)$ $=\{-1;1;-2;2;-4;4\}$ nên suy ra $m \in \{-4;2;-5;1;-7;3\}$

Kết hợp với điều kiện $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ nên $m \in \{-4;2;-5;1;-7;3\}$ thì G nhận giá trị nguyên.

c) Ta có $H = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1x_2 = 4(m+1)^2 - 3(m+3) = 4m^2 + 5m - 5$

Khi m = 1 thì H = 4 còn khi m = -2 thì H = 1. Nên minH = 1 khi m = -2

d) $I = 3x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 3x_1x_2 - 2\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right] = 7x_1x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right)^2$

$$= 7(m+3) - 2.4(m+1)^2 = -8m^2 - 9m + 29$$

Khi m = 1 thì H = 12 còn khi m = -2 thì H = 15.Nên maxH = 15 khi m = -2

Thí dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$ (4). Tìm m để phương trình (4):

a) có hai nghiệm trái dấu
b) có hai nghiệm cùng dấu
c) có hai nghiệm cùng dương.
d) có hai nghiệm cùng âm.
e) có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia

***Lời giải*.**

a) Để phương trình (4) có hai nghiệm trái dấu thì ac < 0 $\Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vậy $-1 < m < 1$ thì phương trình (4) có hai nghiệm trái dấu.

b) Để phương trình (4) có hai nghiệm cùng dấu thì $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2m \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$

Vậy m < -1 thì phương trình (4) có hai nghiệm cùng dấu.

c) Để phương trình (4) có hai nghiệm cùng dương thì

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2m \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 2(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Vậy không có giá trị m nào để phương trình (4) có hai nghiệm cùng dương.

d) Để phương trình (4) có hai nghiệm cùng âm thì $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2m \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 2(m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$

Vậy m < -1 thì phương trình (4) có hai nghiệm cùng âm.

e) Để phương trình (4) có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia thì

$$\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2m \ge 0 \\ x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ m^2 + 16m - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -17 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -17 \end{array}\right..$$

Vậy m = 1 hoặc m = -17 thì phương trình (4) có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia .

11. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng – Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của nó:

Phương pháp .

- Nếu 2 số u và v có: $\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases} \Rightarrow$ u, v là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$ (*).

- Giải pt (*):

+ Nếu $\Delta' > 0$ (hoặc $\Delta > 0$) $\Rightarrow$ pt (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Vậy $\begin{cases} u = x_1 \\ v = x_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = x_2 \\ v = x_1 \end{cases}$.

+ Nếu $\Delta' = 0$ (hoặc $\Delta = 0$) $\Rightarrow$ pt (*) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$. Vậy $u = v = -\dfrac{b'}{a}$.

+ Nếu $\Delta' < 0$ (hoặc $\Delta < 0$) $\Rightarrow$ pt (*) vô nghiệm. Vậy không có 2 số u, v thỏa đề bài.

Thí dụ 1: Tìm 2 số u, v biết u + v = 11 và u.v = 28.

Lời giải.

Theo đề bài $\Rightarrow$ u, v là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$(*)

Phương trình (*) có $\Delta = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$.

Vậy: $\begin{cases} u = 7 \\ v = 4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = 4 \\ v = 7 \end{cases}$

Thí dụ 2: Cho hai số a = $\sqrt{3}$ +1 và b = 3 – $\sqrt{3}$. Viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là a và b.

Lời giải.

Ta có a + b = ($\sqrt{3}$+1) + (3 – $\sqrt{3}$) = 4.

a.b = ($\sqrt{3}$+1). (3 – $\sqrt{3}$) = 2$\sqrt{3}$.

Suy ra: a, b là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$: Đây là phương trình cần tìm.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = 26x^2 + 3x + 1931$

b) $B = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2)$

c) $C = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$; $D = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$; $E = \dfrac{x^2 - 2x + 2020}{x^2}$; $F = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$; $G = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = -11x^2 + 3x - 1945$

b) $B = 2020 - (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

c) $C = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{4x + 3}{x^2 + 1}$ b) $B = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1}$ c) $C = \dfrac{27 - 12x}{x^2 + 9}$ d) $D = \dfrac{8x + 3}{4x^2 + 1}$

e) $E = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$ f) $F = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$ g) $G = \dfrac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$ h) $H = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3}$

i) $I = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$

Bài 4.

a) Tìm cặp số (*x; y*) thỏa mãn phương trình: $x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$ sao cho y đạt giá trị nhỏ nhất.

b)Tìm cặp số (*x; y*) thỏa mãn phương trình: $x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$.

c) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (*x; y)* thỏa mãn: $x^2 - 2yx + 2y^2 + 4y - 13 = 0$.

d) Tìm x để biểu thức $J = \dfrac{2\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x} + 3}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 5. Phân tích thành nhân tử các đa thức sau:

a) $x^2 - 7x + 12$

b) $7x^2 - 5x - 12$

c) $-2x^2 + 9x + 11$

d) $-15x^2 + x + 28$

Bài 6. Nếu phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ và phương trình $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm chung thì phương trình $x^2 + (a_1 + a_2)x + b_1 + b_2 = 0$ luôn có nghiệm thực.

Bài 7. Cho các phương trình $ax^2 + 2bx + c = 0$; $bx^2 + 2cx + a = 0$; $cx^2 + 2ax + b = 0$. Trong đó a, b, c khác 0. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các phương trình trên có nghiệm.

Bài 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm:

a) $x^2 + (a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$

b) $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ (1)

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.
2. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

   a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = 2020 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2$
c) Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa x_1, x_2.
d) Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên
e) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 3$
f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu
h) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.
i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.
j) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài 10. Cho phương trình $x^2 + (m - 1)x + 2m - 6 = 0$ (2)
1. Chứng minh rằng phương trình (2) luôn có nghiệm với mọi m.
2. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2).
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.
b) Tìm giá trị lớn nhất của $D = 2021 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$
c) Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa x_1, x_2.
d) Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên
e) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 12$
f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu
h) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.
i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.
j) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài 11. Cho phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 2m + 2 = 0$ (3)
1. Tìm m để phương trình (3) luôn có nghiệm.
2. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (3).
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = x_1^2 + x_2^2$.
b) Tìm giá trị lớn nhất của $F = 2021 - x_1^2 - x_2^2$
c) Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa x_1, x_2.
d) Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên
e) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2$
f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu
h) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.
i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

j) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài 12. Cho phương trình $x^2 +2(m – 1)x - 2m + 5 = 0$ (4)

1. Tìm m để phương trình (4) luôn có nghiệm.
2. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (4).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $G = x_1^2 + x_2^2 + 2020$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $H = 2021 - x_1^2 - x_2^2$

c) Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa x_1, x_2.

d) Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên

e) Tìm m để $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 0$

f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu

h) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

j) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 4mx + 9 = 0$ (5)

1. Tìm m để phương trình (5) luôn có nghiệm.
2. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (5).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $I = x_1^2 + x_2^2 + 2021$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $K = 2022 - x_1^2 - x_2^2$

c) Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa x_1, x_2.

d) Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên

e) Tìm m để $x_1 - x_2 = 6$

f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu

h) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

j) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài 14. Cho phương trình $(m-1)x^2 – 2(m+1)x + m + 2 = 0$ (6)

1. Tìm m để phương trình (6) luôn có hai nghiệm.
2. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (6).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $L = x_1^2 + x_2^2 + 2021$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $M = 2022 - x_1^2 - x_2^2$

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu

e) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

h) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

i) Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

j) Tìm m để $x_1 = 2x_2$.

k) Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa x_1, x_2.

Bài 15. Cho phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0$ .Tìm m để phương trình trên:

a) Vô nghiệm
b) Có một nghiệm
c) Có hai nghiệm
d) Có hai nghiệm phân biệt

Bài 16. Giải và biện luận phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$

Bài 17. *Cho parabol* $y = -\frac{3}{4}x^2$ (P) và đường thẳng $y = (m - 2)x + 3$ (d).

17.1)Tìm m để:

a) Đường thẳng (d) không cắt parabol (P)
b) Đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.
c) Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

17.2) Gọi x_A, x_B là hoành độ giao điểm của (d) với (P). Tìm m để:

a) $P = y_A + y_B = 10$
b) $Q = y_A + y_B$ đạt giá trị lớn nhất
c) $K = 2020 - y_A - y_B$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 18. Cho phương trình $x^2 + x + m = 0$. Tìm m để phương trình có các nghiệm x_1, x_2 sao cho L = $x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_2 + 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 19. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $2x^2 + 2(m + 1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M = $|x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2|$.

Bài 20. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $\frac{mx}{x^2 - 1} - 2 = \frac{1}{x - 1}$.

Bài 21. Cho phương trình $mx^4 + 2(m - 2)x^2 + m = 0$. Tìm m để phương trình:

a) Có bốn nghiệm phân biệt
b) Có ba nghiệm phân biệt
c) Có hai nghiệm phân biệt
d) Vô nghiệm.

Bài 22. Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi là 6. Tìm diện tích hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài 23. Lập phương trình bậc hai có các hệ số là số hữu tỉ có một nghiệm là $1 + \sqrt{2}$. Xác định các hệ số của phương trình.

Bài 24. Cho phương trình bậc hai (ẩn *x*): $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ (1). Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) và $A=\dfrac{x_1^2+x_2^2+6x_1x_2+12}{x_1^2+x_2^2+14x_1x_2+36}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để A nhận giá trị nguyên.