Đôi khi trong quá trình giải toán có những đẳng thức khá đẹp và nếu chúng ta chịu khó suy luận và tìm tòi khai thác nó sâu hơn, qua đó mà ta có thể hình thành được nhiều bài toán mới hoặc vận dụng để giải được nhiều bài toán khác.

Bài viết này tôi xin giới thiệu một số bài toán khai thác từ một công thức tính diện tích của tam giác và một đẳng thức. Qua đó học sinh hứng thú, nắm được phương pháp học tập một cách có hiệu quả hơn.

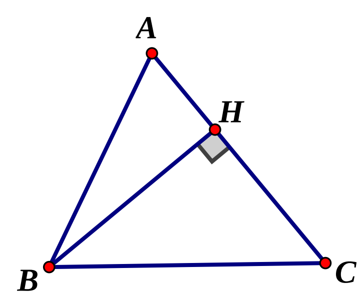
NỘI DUNG

Chúng ta cùng xuất phát từ một bài toán mở đầu sau:

Cho tam giác nhọn ABC, biết AC = b, AB = c; $B\widehat{A}C = \alpha$.

a) Tính diện tích tam giác ABC theo b, c và α.

b) Chứng minh $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$



Lời giải. a) Kẻ đường cao BH nên BH = AB.sinA (1)

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.AB.\sin A$

Hay $S_{ABC} = \frac{1}{2}b.c.\sin\alpha$.

b) Ta có HC = AC – AH mà AH = AB.cosA nên HC = AC - AB.cosA.(2)

Ta có tam giác BHC vuông tại H nên $BC^2 = BH^2 + HC^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $BC^2 = (AB.\sin A)^2 + (AC - AB.\cos A)^2$

$$= (AB.\sin A)^2 + AC^2 – AC.AB.\cos A + (AB.\cos A)^2$$

$$= (AB.\sin A)^2 + (AB.\cos A)^2 + AC^2 – AC.AB.\cos A$$

$$= AB^2(\sin^2 A + \cos^2 B) + AC^2 – AC.AB.\cos A$$

$$= AB^2 + AC^2 – 2AC.AB.\cos A$$

Hay $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (đpcm)

Với kết quả bài toán này mà ta có thể ứng dụng vào giải các bài toán khác.

Bài toán 1. *(vận dụng bài toán mở đầu)*

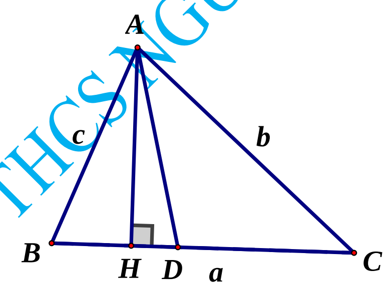
Cho tam giác nhọn ABC, biết BC = a, AC = b, AB = c. Gọi S, p, lần lượt là diện tích, nửa chu vi của tam giác ABC, phân giác AD.

Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

b) AD = $\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$; (với $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$)

c) S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



Lời giải.

a) Áp dụng bài toán mở đầu, ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}\text{bc.sinA} = \frac{1}{2}\text{ac.sinB} = \frac{1}{2}\text{ab.sinC}$ nên suy ra $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (đpcm)

b) Ta có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\text{sinA} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD.AC.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.\text{sinA} = AD.\sin\frac{A}{2}.(AB+AC)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = AD.\sin\frac{A}{2}.(AB+AC)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\cos\frac{A}{2} = AD(AB+AC)$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2AB.AC\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \text{ (đpcm)}$$

c) ***Cách 1.*** Ta có $S = \frac{1}{2}\text{bc}\sin A \Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A \Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)$

$\Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2(1+\cos A)(1-\cos A)$ mà $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Nên $S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

$$= \frac{1}{16}\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(\text{b}-\text{c})^2\right]$$

$$= \frac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(\text{a}-\text{b}+\text{c})$$

$$= \frac{(b+c+a)}{2}.\frac{(b+c-a)}{2}.\frac{(a+b-c)}{2}.\frac{(\text{a}+\text{c}-\text{b})}{2}$$

$$= p.(p-a)(p-b)(p-c)$$

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Cách 2.

Ta có $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}.\frac{b+c-a}{2}.\frac{a+c-b}{2}.\frac{a+b-c}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{b+c+a}{2}.\frac{b+c-a}{2}.\frac{a-(b-c)}{2}.\frac{a+b-c}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4}.\frac{a^2-(b-c)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-b^2-c^2+2bc.\cos A}{4}.\frac{b^2+c^2-2bc.\cos A-(b-c)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{bc(1+\cos A)}{2}.\frac{bc(1-\cos A)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2c^2(1-\cos^2 A)}{4}} = \sqrt{\frac{b^2c^2\sin^2 A}{4}} = \sqrt{S^2} = S$$

Cách 3. *Kẻ đường cao AH*

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông, ta có:

$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC - CH)^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC^2 - 2BC.CH + CH^2) = AC^2 - HC^2$

$$\Leftrightarrow CH = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2BC} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$$

$$\Rightarrow CH^2 = \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

$$S_{ABC}^2 = \frac{AH^2.BC^2}{4} = \left[b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2\right].\frac{1}{4}.a^2$$

$$= \frac{\left[4a^2b^2 - (b^2 + a^2 - c^2)^2\right].a^2}{16a^2}$$

$$= \frac{(2ab + b^2 + a^2 - c^2)(2ab - b^2 - a^2 + c^2)}{16}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b)}{16}$$

$$= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{16}$$

$$= p(p - a)(p - b)(p - c)$$

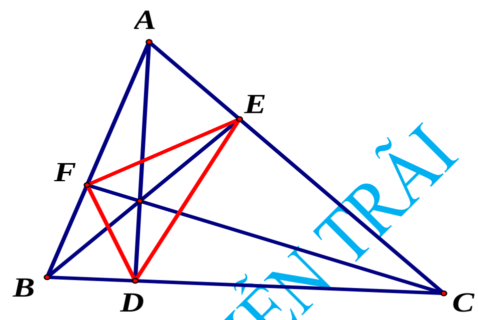
$$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Bài toán 2. *(áp dụng bài toán mở đầu)*

Cho tam giác nhọn ABC, ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{S_{\text{AEF}}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$

b) $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$



Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{S_{\text{AEF}}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}AE.\text{AF.sinA}}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A} = \dfrac{AE.\text{AF}}{AB.AC} = \dfrac{AE}{AB}.\dfrac{AF}{AC} = \text{cosA}.\text{cosA} = \cos^2 A$ (đpcm) (1)

b) Chứng minh tương tự câu a ta cũng có $\dfrac{S_{\text{BDF}}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$; $\dfrac{S_{\text{CDE}}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$ (2)

Ta có $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC} - S_{\text{AEF}} - S_{\text{BDF}} - S_{\text{CDE}}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{S_{\text{AEF}}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{\text{BDF}}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{\text{CDE}}}{S_{ABC}}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

hay $\dfrac{S_{\text{DEF}}}{S_{ABC}} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$ (đpcm)

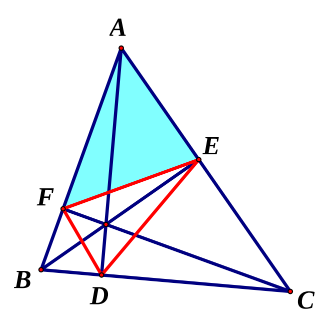
Bài toán 3. (áp dụng bài toán 2)

Cho tam giác nhọn ABC có $S_{\Delta ABC} = 75{,}1954$ cm^2 và các đường cao AD, BE, CF. Xác định số đo góc A của ΔABC để $S_{\Delta\text{AEF}} = 30{,}41975$ cm^2

Lời giải.

Ta có $\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}} = \cos^2 A$

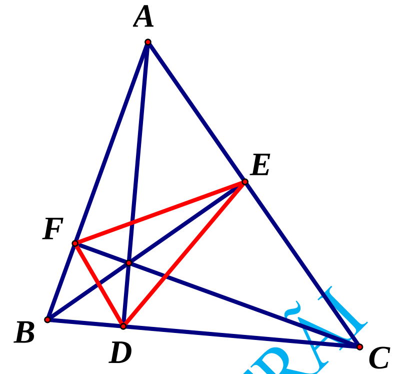
$\Leftrightarrow \cos A = \sqrt{\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}} \Rightarrow A = \cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}}\right) = 50^0 30' 11.1''$



Bài toán 4. (áp dụng bài toán 2)

Cho tam giác ABC có AB = 19,5cm, AC = 27,7cm $\widehat{BAC} = 55^0$ và các đường cao AD, BE, CF. Tính diện tích ΔDEF

Lời giải.



Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A \approx 221{,}23$ (cm^2)

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A} \approx 22{,}976$ (cm)

Ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{AC.\sin A}{BC} \Rightarrow \widehat{B} = \sin^{-1}\left(\frac{AC.\sin A}{BC}\right) = 80^0 57'50{,}25''$

$\Rightarrow \widehat{C} = 44^0 2'9{,}75''$

Ta có $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

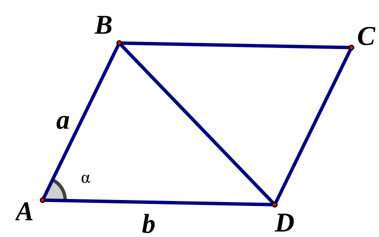
$\Rightarrow S_{DEF} = S_{ABC}(\sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \approx 28{,}654 (cm^2)$

Bài toán 5. *(vận dụng bài toán mở đầu)*

Cho hình bình hành ABCD , biết AB = a, AD = b và $\widehat{A} = \alpha$.

a) Tính diện tích hình bình hành ABCD theo a, b và α

b) Chứng minh rằng : $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$



Lời giải.

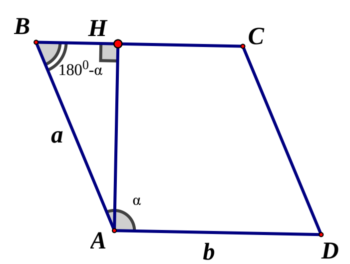
a) – Nếu $\alpha < 90^0$, ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{1}{2}a.b.\sin\alpha = ab\sin\alpha$

Nên $S_{ABCD} = ab\sin\alpha$ (1)

– Nếu $90^0 < \alpha < 180^0$, ta kẻ AH vuông góc với BC nên S_{ABCD} = AH.BC

Mà tam giác AHB vuông tại H nên AH = AB.sinB.

Do đó S_{ABCD} = AB.sinB.BC = $a.b.\sin(180^0 - \alpha)$ (2)



b)Từ (1) và (2) suy ra $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$

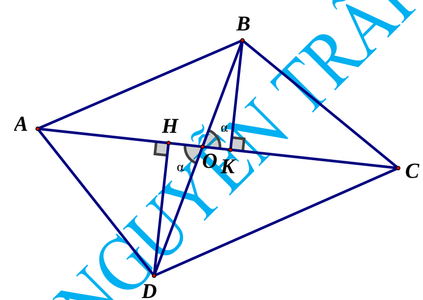
Bài toán 6. (áp dụng bài toán mở đầu)

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{AOB}=\alpha$; BD= m, AC = n.

a) Tính diện tích của tứ giác ABCD theo m, n và α.

b) Áp dụng. Tính diện tích tứ giác ABCD với m = 26,31931 cm ; n = 30,41975 cm và α = $80^0 20' 11''$

Lời giải.



Kẻ BK và DH vuông góc với AC

Ta có $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

$$=\frac{1}{2}AC.BK+\frac{1}{2}AC.DH$$

$$=\frac{1}{2}AC(OB+OD).\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$$

Vậy: $S_{ABCD} =\frac{1}{2}m.n.\sin\alpha$

b) $S_{ABCD} \approx 394,63308$ (cm^2)

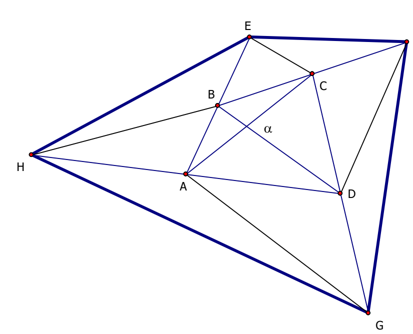
Bài toán 7. (*vận dụng bài toán 6*)

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tạo thành góc α và AC = a, BD = b. Trên tia đối của các tia BA, CB, DC, AD lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho BE = BA, CF = CB, DG = DC và AH = AD.

a) Lập công thức tính diện tích tứ giác EFGH theo a, b và α.

b) Áp dụng: Tính góc α, biết a = 25,081911(cm) ; b = 41,02013(cm) và S_{EFGH} = 2488,325971 (cm^2)

Lời giải.



Ta có BA là đường trung tuyến của ΔHBD nên $S_{BAH}=S_{BAD}$

HB là đường trung tuyến của ΔAHE nên $S_{HBA}=S_{HBE}$

Do đó $S_{AHE}=2S_{BAD}=2S_{DAB}$

Chứng minh tương tự, ta có

$$S_{BEF}=2S_{ABC}$$

$S_{CFG} = 2S_{BCD}$

$S_{DGH} = 2S_{CDA}$

Mà $S_{EFGH} = S_{AHE} + S_{BEF} + S_{CFG} + S_{DGH} + S_{ABCD}$

$= (S_{AHE} + S_{CFG}) + (S_{BEF} + S_{DGH}) + S_{ABCD}$

$= 2(S_{DAB} + S_{BCD}) + 2(S_{ABC} + S_{CDA}) + S_{ABCD}$

$= 2S_{ABCD} + 2S_{ABCD} + S_{ABCD} = 5S_{ABCD}$

Suy ra $S_{EFGH} = 5S_{ABCD}$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ (tứ giác có 2 đường chéo vuông góc)

Do đó $S_{EFGH} = \frac{5}{2}ab\sin\alpha$

b) Áp dụng: $S_{EFGH} = \frac{5}{2}ab\sin\alpha \Rightarrow \alpha = 75^0 19'54"$

Bài toán 8*.(áp dụng kết quả bài toán 5)*

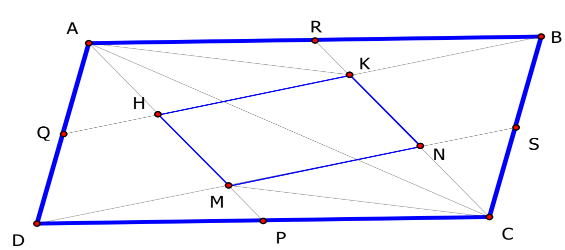
Cho hình bình hành ABCD có AB = a, BC = b và $\hat{B} = \alpha$. Gọi R, S, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Vẽ AP cắt BQ, DS lần lượt tại H, M. Vẽ CR cắt BQ, DS lần lượt tại K, N.

a) Lập công thức tính diện tích tứ giác HKNM theo a, b và α.
b) Áp dụng : Tính số đo các góc của hình bình hành ABCD, biết a = 22,121944 (cm), b = 30,041975 và diện tích tứ giác HKNM là 128,5765873 (cm^2)

Lời giải.

a) Nối A với C ta có AP là đường trung tuyến của ΔACD

nên $S_{ADP} = S_{APC} = \frac{1}{2}S_{ADC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$



Tương tự $S_{CRA} = \frac{1}{2}S_{CBA} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Do đó $S_{APC} + S_{CRA} = S_{ARCP} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Dễ dàng chứng minh được tứ giác HKNM là hình bình hành

Nên $S_{KHA} = S_{KHB} = S_{MNK} = S_{MNC} = S_{AKB} = S_{CMD}$

Mà $S_{AKR} = \frac{1}{2}S_{AKB}$ (đáy gấp đôi, chung đường cao)

tương tự: $S_{CMP} = \frac{1}{2}S_{CMD}$

Suy ra: $S_{KHA} = S_{KHB} = S_{MNK} = S_{MNC} = \left(S_{AKR} + S_{CMP}\right) = \frac{1}{5}S_{\text{ARCP}}$

Mà $S_{\text{ARCP}} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{HKM} + S_{MKN} = \frac{2}{5}S_{\text{ARCP}}$

Hay $S_{HKNM} = \frac{2}{5}.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$

$S_{ABCD} = ab\sin\alpha$

Do đó $S_{HKNM} = \frac{1}{5}S_{ABCD} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha$

$S_{HKNM} = \frac{1}{5}S_{ABCD} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha$

Vậy: $S_{HKNM} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha$

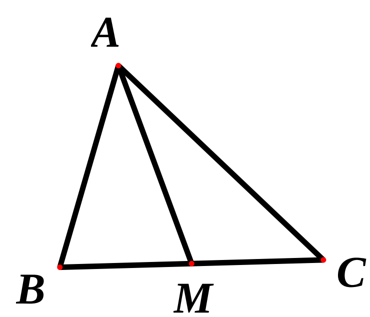
b)Áp dụng: $S_{HKNM} = \frac{1}{5}ab\sin\alpha \Rightarrow \alpha = 75^0 19'0,54''$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{C} = 104^0 40' 59,4''$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 75^0 19' 0,54''$

Bài toán 9. (*áp dụng bài toán mở đầu*)

Cho tam giác ABC . Tính độ dài trung tuyến AM, biết BC = a, AC = b, AB = c.

Lời giải.



Ta có $AM^2 = BA^2 + \frac{BC^2}{4} - AB.BC.\cos B$ (tam giác ABM) (1)

$AM^2 = CA^2 + \frac{BC^2}{4} - AC.BC.\cos C$ (tam giác ACM) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2AM^2 = AC^2 + BA^2 + \frac{BC^2}{2} - (AB.BC.\cos B + AC.BC.\cos C)$ (3)

Mà $\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA.BC}$; $\cos C = \frac{CA^2 + BC^2 - AB^2}{2CA.BC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$

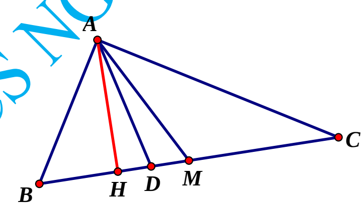
Do đó $AM = \sqrt{\dfrac{AB^2}{2} + \dfrac{AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}}$

Bài toán 10. *(áp dụng bài toán mở đầu)*

Cho tam giác nhọn ABC, biết AC = b, AB = c; $\widehat{BAC} = \alpha$. đường trung tuyến AM, đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D (M, D thuộc cạnh BC) .Tính diện tích tam giác ADM theo b, c và α.

Lời giải.

Giả sử ΔABC có AB < AC (1).



Vì AD là phân giác của góc A nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$2BD < DC + BD.

$\Rightarrow BD < \dfrac{BC}{2} = BM$. Do đó điểm D nằm giữa B và M

$\Rightarrow$DM = BM – BD = $\dfrac{BC}{2} - BD$.

Từ (2) suy ra $BD = \dfrac{AB.DC}{AC} = \dfrac{AB(BC - BD)}{AC} = \dfrac{AB.BC - AB.BD}{\text{AC}}$

$\Rightarrow$BD.AC = AB.BC – AB.BD $\Rightarrow$BD(AB + AC) = AB.BC

$\Rightarrow BD = \dfrac{AB.BC}{AB + AC}$

$\Rightarrow DM = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{BC(AB + AC) - 2AB.BC}{2(AB + AC)}$.

Ta có $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{AH.DM}{AH.BC} = \dfrac{DM}{BC} = \dfrac{BC(AB + AC) - 2AB.BC}{2(AB + AC).BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AC - AB}{AB + AC}$

Vì dạng tổng quát: AB có thể lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng AC.

Nên ta có: $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB - AC}{AB + AC}\right| \Rightarrow S_{ADM} = \dfrac{1}{4}b.c.\sin\alpha.\left|\dfrac{b - c}{b + c}\right|$

Từ kết quả này cho ta bài toán 11

Bài toán 11. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM, đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D (M, D thuộc cạnh BC) với AB = 10 cm. Xác định độ dài cạnh AC của ΔABC để $S_{ADM} = 25\%S_{ABC}$.

Lời giải. *Áp dụng kết quả bài toán 10*

Ta có $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{AB-AC}{AB+AC} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{AB-AC}{AB+AC} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC = \dfrac{10}{3} \\ AC = 30 \end{array}\right.$.

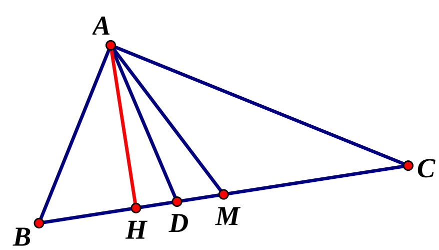
Vậy AC = 30 (cm) hoặc AC = $\dfrac{10}{3}$ (cm) thì $S_{ADM} = 25\%\ S_{ABC}$.

Từ kết quả của bài toán 10 ta cũng có bài toán sau:

Bài toán 12. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM, đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D (M, D thuộc cạnh BC).

Chứng minh rằng: $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$

Lời giải. Giả sử ΔABC có AB < AC (1)



Vì AD là phân giác của góc A nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$2BD < DC + BD

$\Rightarrow BD < \dfrac{BC}{2} = BM$ .Do đó điểm D nằm giữa B và M

$\Rightarrow$DM = BM – BD = $\dfrac{BC}{2} - BD$

Từ (2) suy ra $BD = \dfrac{AB.DC}{AC} = \dfrac{AB(BC-BD)}{AC} = \dfrac{AB.BC - AB.BD}{\text{AC}}$

$\Rightarrow$BD.AC = AB.BC – AB.BD $\Rightarrow$BD(AB + AC) = AB.BC

$\Rightarrow BD = \dfrac{AB.BC}{AB+AC}$

$$\Rightarrow DM = \frac{BC}{2} - \frac{AB.BC}{AB+AC} = \frac{BC(AB+AC)-2AB.BC}{2(AB+AC)}$$

Ta có $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{AH.DM}{AH.BC} = \frac{DM}{BC} = \frac{BC(AB+AC)-2AB.BC}{2(AB+AC).BC} = \frac{1}{2}.\frac{AC-AB}{AB+AC}$

Vì dạng tổng quát: AB có thể lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng AC

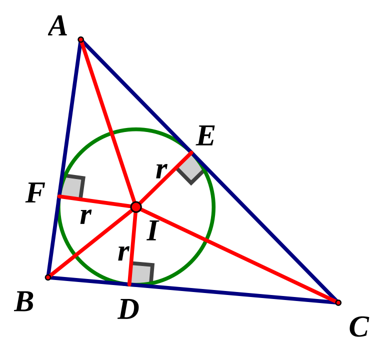
Nên ta có: $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|$ (a)

Ta có $AB = \frac{AH}{\sin B}$ và $AC = \frac{AH}{\sin C}$ (trong ΔABH vuông tại H, ΔACH vuông tại H)

$$\Rightarrow \frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{\frac{AH}{\sin B}-\frac{AH}{\sin C}}{\frac{AH}{\sin B}+\frac{AH}{\sin C}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin C}}{\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin C-\sin B}{\sin B+\sin C}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right| \text{ (b)}$$

Từ (a) và (b) suy ra: $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$ (đpcm).

Bài toán 13. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, bán kính r, biết BC= a, AC = b, AB = c và $p = \frac{a+b+c}{2}$.



a) Tính diện tích tam giác ABC theo p và r.

b) Chứng minh: $r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$

Lời giải.

a) Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IBC} + S_{\Delta IAC} = \frac{1}{2}AB.r + \frac{1}{2}BC.r = \frac{1}{2}AC.r$

$$= \frac{1}{2}.r(AB+BC+CA) = r.\frac{a+b+c}{2} = p.r$$

b) Ta có ΔAFI vuông tại F $\Rightarrow$ r = FI = AF.tan $\widehat{FAI}$ =AF.tan $\frac{A}{2}$ (1)

Mà $p-a = \frac{AB+AC+BC-2BC}{2} = \frac{AB+AC-BC}{2}$

$$=\frac{AF+BF+AE+CE-BD-DC}{2}=\frac{2AF}{2}=\text{AF}\ \ (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}$ (3)

Chứng minh tương tự ta cũng có $r=(p-b)\tan\frac{B}{2}$; $r=(p-c)\tan\frac{C}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$

Bài toán 14. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O,R) . Hai đường cao BM, CN cắt nhau tai H.

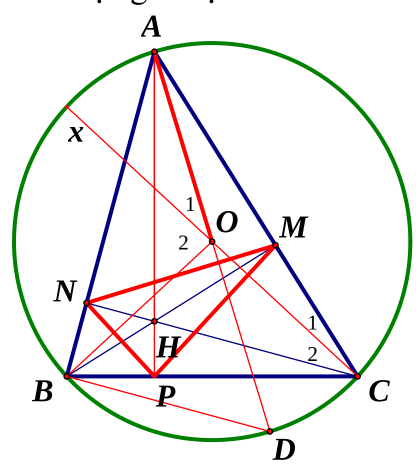
a) Chứng minh $\widehat{AMN}=\widehat{ABC}$.

b) Chứng minh rằng: OA vuông góc với MN và AB = 2R.sinC

c) Chứng minh: $S_{ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4R}$

d) Xác định số đo BAC để diện tích tứ giác BNMC bằng $\frac{3}{4}$ diện tích tam giác ABC.

e) Tìm điều kiện của tam giác ABC để cosA + cosB + cosC đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.



Lời giải.

a) Ta có $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\cos A$ nên $\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

Suy ra $AMN=ABC$

b) Lấy D đối xứng với A qua O. Khi đó ta có ΔABD vuông tại B

Suy ra $\widehat{BAD}+\widehat{BDA}=90^0$ (1)

Ta có ΔOBC cân tại O và ΔOAC cân tại O.

Nên $\widehat{ACB}=\frac{\widehat{AOx}}{2}+\frac{\widehat{BOx}}{2}=\frac{\widehat{AOB}}{2}$ và $\widehat{ADB}=\frac{\widehat{AOB}}{2}$ (góc ngoài tam giác)

Suy ra $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ (2)

Mặt khác ta có ΔAMN $\backsim$ ΔABC (c.g.c).

Suy ra $\widehat{ANM}=\widehat{ACB}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{ANM}+\widehat{BAD}=90^0$

Do đó AD $\perp$ MN hay OA $\perp$ MN (đpcm)

Từ (2) suy ra sinC = sinD mà $\sin D=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{2R}$

Suy ra AB = 2R.sinC (4)

c) Ta có $S_{ABC} = \dfrac{CB.CA.\sin C}{2}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

d) Ta có $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ nên $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2$

Suy ra $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$

Mà $\dfrac{S_{BNMC}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC} - S_{AMN}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$

Do đó $\sin A = \sqrt{\dfrac{S_{BNMC}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^0$

Vậy: $\widehat{BAC} = 60^0$ thì diện tích tứ giác BNMC bằng $\dfrac{3}{4}$ diện tích tam giác ABC.

e) Kẻ AH cắt BC tại P

Ta có $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \cos^2 A \Rightarrow \cos A = \sqrt{\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\dfrac{AM.AN}{AB.AC}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{AN}{AB} + \dfrac{AM}{AC}\right)$ (BĐT Cô-si) (6)

Tương tự : $\cos B = \sqrt{\dfrac{S_{BNC}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\dfrac{BN.BP}{BC.AB}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{BN}{AB} + \dfrac{BP}{BC}\right)$ (7)

$\cos C = \sqrt{\dfrac{S_{CPM}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\dfrac{CP.CM}{AC.BC}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{CP}{BC} + \dfrac{CM}{AC}\right)$ (8)

Từ (6), (7) và (8) suy ra $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$.

Dấu ‘=’ xảy ra khi $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AM}{AC}$; $\dfrac{BN}{AB} = \dfrac{BP}{BC}$; $\dfrac{CP}{BC} = \dfrac{CM}{AC}$

Ta lại có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$; $\dfrac{BP}{AB} = \dfrac{BN}{BC}$; $\dfrac{CM}{BC} = \dfrac{CP}{AC}$ nên AB = BC = AC.

Do đó $\cos A + \cos B + \cos C$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{3}{2}$ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán tổng quát: Cho tam giác ABC, biết BC = a, AC = b, AB = c. Gọi S, p, r, R lần lượt là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, phân giác AD, trung tuyến AM.

Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

b) S = $\dfrac{1}{2}bc\sin A = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{abc}{4R}$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

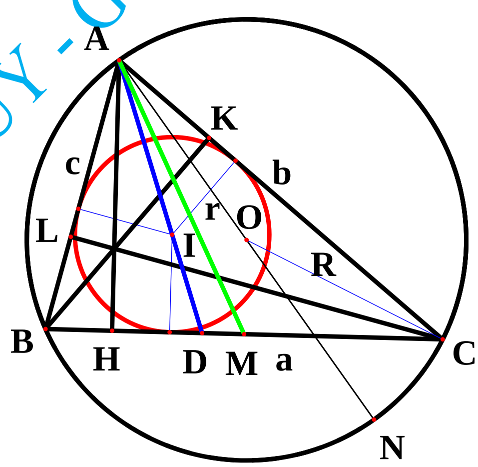
d) AD = $\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

e) $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2}$

f) $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB-AC}{AB+AC}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$

Lời giải.

Kẻ các đường cao AH, BK, CL của ΔABC (H$\in$BC, K$\in$AC, L$\in$AB)
I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kéo dài OA cắt đường tròn (O) tại N



a)Ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{a}{\frac{CL}{b}} = \dfrac{ab}{CL}$; $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{b}{\frac{CL}{a}} = \dfrac{ab}{CL} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$(1)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\frac{BK}{c}}=\frac{ac}{BK};\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\frac{BK}{a}}=\frac{ac}{BK}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\,(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\,(3)$

Ta có : ABNC là tứ giác nội tiếp đường tròn (O;R)

$\Rightarrow \widehat{ANB}=\widehat{ACB}=\widehat{C}$

Ba điểm A, O, N thẳng hàng; A và N thuộc đường tròn (O;R)

$\Rightarrow$AN là đường kính của đường tròn (O;R)

$\Rightarrow \widehat{ANB}=90^0$ và AN = 2R

Ta có $\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin ABN}=\frac{c}{\frac{c}{AN}}=AN=2R$ (4) (ΔABN vuông tại B)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (đpcm)

b)Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}c.CL=\frac{1}{2}c.b\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A\,(*)$

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta IAB}+S_{\Delta IBC}+S_{\Delta IAC}=\frac{1}{2}AB.r+\frac{1}{2}BC.r=\frac{1}{2}AC.r$$

$$=\frac{1}{2}.r(AB+BC+CA)=r.\frac{a+b+c}{2}=p.r\,(**)$$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông, ta có:

$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC - CH)^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC^2 - 2BC.CH + CH^2) = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow$ CH = $\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2BC}=\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}$

$\Rightarrow$ CH^2 = $\left(\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2$

$\Rightarrow$AH^2 = b^2 - $\left(\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2$

$$S_{ABC}^2=\frac{AH^2.BC^2}{4}=\left[b^2-\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2\right].\frac{1}{4}.a^2$$

$$=\frac{\left[4a^2b^2-(b^2+a^2-c^2)^2\right].a^2}{16a^2}$$

$$=\frac{(2ab+b^2+a^2-c^2)(2ab-b^2-a^2+c^2)}{16}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{16}$$

$$=\frac{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{16}$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$\Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (***)

Từ câu a) $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow a=2R\sin A=2R.\dfrac{CL}{b}$

$\Rightarrow$ab = 2R.CL $\Rightarrow$abc = 2R.CL.c = 2R.2S$_{ABC}$

$\Leftrightarrow abc=4R.S_{ABC}\Leftrightarrow S_{ABC}=\dfrac{abc}{4R}$ (****)

Từ (*),(**), (***),(****), ta có

S = $\dfrac{1}{2}bc\sin A=pr=\sqrt{p(p-a)p-b)(p-c)}=\dfrac{abc}{4R}$ (đpcm)

c) Ta có b^2 + c^2 - 2bc.cosA = AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + AB^2 – 2AB.AC.$\dfrac{AK}{AB}$

= AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + (AK^2 +BK^2) – 2AC.AK

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 – 2(AK + KC)AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 – 2(AK + KC)AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 – 2AK^2 - 2AK.KC$

$= KC^2 + BK^2 = BC^2 = a^2$

Vậy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (đpcm)

d) Ta có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD.AC.\sin\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{2}(AB + AC)$

$\Leftrightarrow AB.AC.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = AD.\sin\frac{A}{2}(AB + AC)$

$\Leftrightarrow AB.AC.2\cos\frac{A}{2} = AD(AB + AC)$

$\Leftrightarrow AD = \dfrac{2AB.AC\cos\frac{A}{2}}{AB + AC}$

$\Leftrightarrow AD = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c}$ (đpcm)

e) Ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$AC^2 = AH^2 + CH^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + \left(\frac{BC}{2} - HM\right)^2 + \left(\frac{BC}{2} + HM\right)^2$

$= 2AH^2 + \frac{BC^2}{4} + HM^2 - BC.HM + \frac{BC^2}{4} + HM^2 + BC.HM$

$$= 2AH^2 + \frac{BC^2}{2} + 2HM^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} = 2AH^2 + 2HM^2 = 2(AH^2 + 2HM^2) = 2\,\mathrm{AM}^2$$

Vậy: $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2}$ (đpcm)

f) Giả sử ΔABC có AB < AC (1)

Vì AD là phân giác của góc A nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$ 2BD < DC + BD

$\Rightarrow BD < \dfrac{BC}{2} = BM$ .Do đó điểm D nằm giữa B và M

Ta có $\dfrac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

$\dfrac{S_{ADB}}{S_{ADC} + S_{ADB}} = \dfrac{AB}{AC + AB}$ hay $\dfrac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \dfrac{AB}{AC + AB}$ suy ra $S_{ADB} = \dfrac{S_{ABC}.AB}{AC + AB}$ (3)

Vì AM là trung tuyến nên $S_{ABM} = S_{ACM} = \dfrac{S_{ABC}}{2}$ (4)

Do đó $S_{ADM} = S_{ABM} - S_{ADB}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $S_{ADM} = \dfrac{S_{ABC}}{2}.\dfrac{AC - AB}{AB + AC}$

Hay $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AC - AB}{AB + AC}\right|$

Vậy $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB - AC}{AB + AC}\right|$.(a)

Theo định lí hàm sin , ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\Rightarrow$ sinB = $\dfrac{b}{2R}$, sinC = $\dfrac{c}{2R}$

Nên $\dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB - AC}{AB + AC}\right|$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra: $\dfrac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB - AC}{AB + AC}\right| = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$ (đpcm).

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC, AB = 8,91 cm, AC = 10,32 cm, $\widehat{BAC} = 72^0$. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Độ dài cạnh BC, số đo góc B, C của tam giác ABC.
c) Độ dài phân giác AD
d) Độ dài đường trung tuyến AM
e) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
f) Bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC, AB = 9 cm, AC = 11 cm, BC =12 cm. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Số đo góc A, B, C của tam giác ABC.
c) Độ dài phân giác AD
d) Độ dài đường trung tuyến AM
e) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
f) Bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3. Cho tam giác ABC có chu vi là 107 cm, $\widehat{ABC} = 30^0 15'$, $ACB = 54^0 25'$. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Độ dài phân giác AD
c) Độ dài đường trung tuyến AM
d) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
e) Bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 22,121944 cm, $ABC = 67^0 22'12"$, $ACB = 21^0 12'$. Tính chính xác 3 chữ số thập phân.

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Độ dài phân giác AD
c) Độ dài đường trung tuyến AM
d) Diện tích tam giác ADM (D, M thuộc cạnh BC)
e) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Tính theo a, b, c:

a) Độ dài ba đường phân giác trong AD, BE, CF của tam giác.
b) Diện tích tam giác DEF.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 75^0 19'54"$, AB = 25,81911 cm, AC = 41,02013 cm . Tính chính xác 4 chữ số thập phân.

a) Độ dài ba trung tuyến AD, BE, CF của tam giác.
b) Diện tích tam giác DEF.

Bài 7. Cho hình chữ nhật ABCD, có BC = a, AB = b. Kẻ CK vuông góc với BD tại K. Tính diện tích tam giác ABK theo a,b.

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r). Tính khoảng cách giữa hai tâm của đường tròn theo R, r.