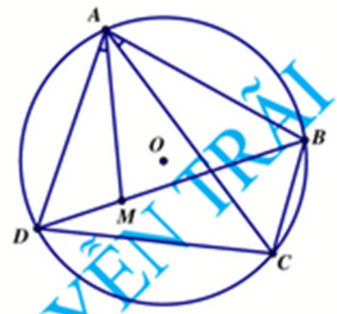
ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ PTOLEME VÀ BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL TRONG BÀI TOÁN TAM GIÁC NHỌN CÓ BA ĐƯỜNG CAO.

I/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. *Định lý Ptoleme.*

Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tích hai đường chéo bằng tổng các tích các cặp cạnh đối diện.

Tứ giác ABCD nội tiếp (O) $\Rightarrow AB.CD + BC.AD = AC.BD$



Chứng minh.

Trên đường chéo BD lấy điểm M sao cho $DAM = CAB$ nên suy ra $BAM = CAD$

Do đó, ta có ΔDAM $\backsim$ ΔCAB (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DM}{CB} \Rightarrow AD.BC = AC.DM$ (1)

Ta cũng có ΔBAM $\backsim$ ΔCAD (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BM$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được: AD.BC + AB.CD = AC(DM + BM) = AC.BD (đpcm).

2. *Bất đẳng thức Erdos – Mordell.*

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có các bất đẳng thức:

a) $R_a + R_b + R_c \ge 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$ (dạng tổng)

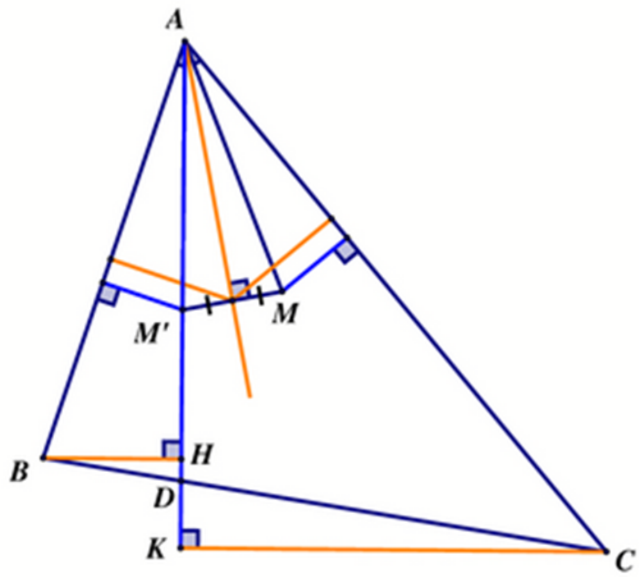
b) $R_a.R_b.R_c \ge 8d_a.d_b.d_c$ (dạng tích)

c) $\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \ge \sqrt{2}\left(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}\right)$ (dạng căn thức)

Chứng minh:

Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Lấy điểm M' đối xứng với M qua phân giác trong BAC. Dựng BH$\perp$AM' và CK$\perp$AM'. Gọi D là giao điểm của AM' với BC. Khi đó $BD \ge BH$ và $CD \ge CK$ (đẳng thức xảy ra khi AD$\perp$BC hay AM'$\perp$BC.



Do đó ta có

$a \ge BH + CK$

$\Leftrightarrow a.R_a \ge BH.R_a + CK.R_a$ ($R_a = AM = AM'$)

$\Leftrightarrow a.R_a \ge 2S_{ABM'} + 2.S_{ACM'}$

$\Leftrightarrow a.R_a \ge c.d_b + b.d_c$

$\Leftrightarrow R_a \ge \dfrac{c}{a}.d_b + \dfrac{b}{a}.d_c$ (1)

Tương tự ta cũng có

$R_b \ge \dfrac{a}{b}.d_c + \dfrac{c}{b}.d_a$ (2)

$R_c \ge \dfrac{a}{c}.d_b + \dfrac{b}{c}.d_a$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được $\Leftrightarrow R_a + R_b + R_c \ge \dfrac{c}{a}.d_b + \dfrac{b}{a}.d_c + \dfrac{a}{b}.d_c + \dfrac{c}{b}.d_a + \dfrac{a}{c}.d_b + \dfrac{b}{c}.d_a$

$\Leftrightarrow R_a + R_b + R_c \ge \left(\dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{c}\right).d_a + \left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a}\right).d_b + \left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}\right).d_c \ge 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$ (đpcm).

Nhân (1), (2), (3) vế theo vế ta được $\Leftrightarrow R_a.R_b.R_c \ge \left(\frac{c}{a}.d_b + \frac{b}{a}.d_c\right)\left(\frac{a}{b}.d_c + \frac{c}{b}.d_a\right)\left(\frac{a}{c}.d_b + \frac{b}{c}.d_a\right)$

$$\Leftrightarrow R_a.R_b.R_c \ge 2\sqrt{\frac{c}{a}.d_b.\frac{b}{a}.d_c}.2\sqrt{\frac{a}{b}.d_c.\frac{c}{b}.d_a}.2\sqrt{\frac{a}{c}.d_b.\frac{b}{c}.d_a} = 8d_ad_bd_c \text{ (đpcm)}$$

Với $x, y > 0$. Ta có $\sqrt{x+y} \ge \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Nên từ (1) theo BĐT Cauchy suy ra $\sqrt{R_a} \ge \sqrt{\frac{c}{a}.d_b + \frac{b}{a}.d_c} \ge \frac{\sqrt{\frac{c}{a}}.\sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{a}}.\sqrt{d_c}}{\sqrt{2}}$ (4)

Tương tự $\sqrt{R_b} \ge \sqrt{\frac{a}{b}.d_c + \frac{c}{b}.d_a} \ge \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{d_c} + \sqrt{\frac{c}{b}}.\sqrt{d_a}}{\sqrt{2}}$ (5)

$$\sqrt{R_c} \ge \sqrt{\frac{a}{c}.d_b + \frac{b}{c}.d_a} \ge \frac{\sqrt{\frac{a}{c}}.\sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{d_a}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Cộng (4), (5), (6) vế theo vế ta được

$$\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}\right)\sqrt{d_a} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\sqrt{d_b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{d_c}$$

$$\ge \sqrt{2}\left(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}\right) \text{ (đpcm).}$$

II/ BÀI TẬP.

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O,R) và ngoại tiếp (I,r); các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác DEF; J, J', J'' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Chứng minh rằng:

1. EF.BC + BF.EC = BE.CF.
2. OJ + OJ' + OJ'' = R + r.
3. HA + HB + HC = 2(OJ + OJ' + OJ'') = 2(R +r).
4. $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$.
5. $S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}$
6. $\frac{HA + HB + HC}{HD + HE + HF} \ge 2$.
7. $\frac{HA.HB.HC}{HD.HE.HF} \ge 8$.
8. $\frac{\sqrt{HA} + \sqrt{HB} + \sqrt{HC}}{\sqrt{HD} + \sqrt{HE} + \sqrt{HF}} \ge \sqrt{2}$.
9. $IA + IB + IC \ge 6r$.
10. $IA.IB.IC \ge 8r^3$.
11. $\sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \ge 3\sqrt{2r}$
12. $HA + HB + HC \ge 12r_1$
13. $HA.HB.HC \ge 64r_1^3$
14. $\sqrt{HA} + \sqrt{HB} + \sqrt{HC} \ge 6\sqrt{r_1}$
15. $HD + HE + HF \le R + r$.

16. $\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$.

17. $\cos A.\cos B.\cos C \le \frac{1}{8}$.

18. $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

19. $R \ge 2r$.

20. $HD+HE+HF \le OJ+OJ'+OJ'' \le \frac{3}{2}R$

21. $HJ+HJ'+HJ'' \ge \frac{3}{2}R$

22. $AJ+BJ'+CJ'' \le \frac{9R}{2}$.

23. $\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}} \ge 3\sqrt{2}$.

24. $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

25. $R_1+R_2+R_3 \ge 3R$.

26. $R_1.R_2.R_3 \ge R^3$

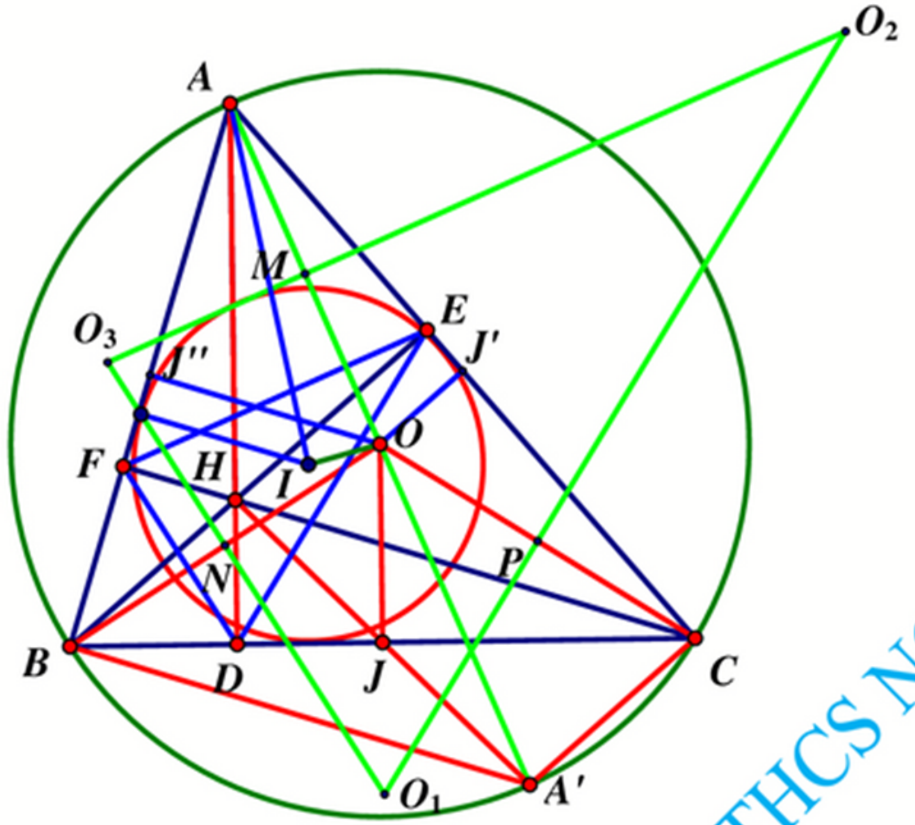
27. $\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}+\sqrt{R_3} \ge 3\sqrt{R}$

28. $AB.BC.CA \ge 24\sqrt{3}\, r^3$

29. $\sin A.\sin B.\sin C \ge 3\sqrt{3}.\left(\frac{r}{R}\right)^3$

30. $OI=\sqrt{R^2-2Rr}$

Lời giải.



1. EF.BC + BF.EC = BE.CF.

Ta có tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn đường kính BC nên theo định lý Ptoleme suy ra EF.BC + BF.EC = BE.CF (đpcm)

2. OJ + OJ' + OJ'' = R + r.

Đặt OJ = x, OJ' = y, OJ'' = z; BC = a, CA = b, AB = c và $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng định lý Ptoleme cho các tứ giác nội tiếp OJ'AJ'', OJBJ'', OJCJ'.

Ta có $OA.J'J'' = OJ'.AJ'' + OJ''.AJ'$

$$\Rightarrow R.\frac{a}{2} = y.\frac{c}{2} + z.\frac{b}{2} \quad (1)$$

Tương tự: $R.\frac{b}{2} = x.\frac{c}{2} + z.\frac{a}{2}$ (2)

$$R.\frac{c}{2} = y.\frac{a}{2} + x.\frac{b}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được $p.R = \frac{b+c}{2}.x + \frac{a+c}{2}.y + \frac{a+b}{2}.z$

$$\Leftrightarrow p.R = p(x+y+z) - \frac{ax+by+cz}{2} = p(x+y+z) - S_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow p.R = p(x+y+z) - p.r$$

Chia cả hai vế cho p ta được: x+ y + z = R +r.

Vậy OJ + OJ' + OJ'' = R + r (đpcm)

3. HA + HB + HC = 2(OJ + OJ' + OJ'') = 2(R +r).

Kẻ đường kính AA'. Khi đó tứ giác BHCA' là hình bình hành mà J là trung điểm của BC nên H, J, A' thẳng hàng suy ra OJ là đường trung bình của $\Delta HAA'$.Do đó HA = 2OJ

Tương tự HB = 2OJ', HC = 2OJ''

Suy ra HA + HB + HC = 2(OJ + OJ' + OJ'') = 2(R+r) (đpcm).

4. $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=2R$.

Ta có tứ giác ABA'C nội tiếp (O) nên $C=A'\Rightarrow \sin C=\sin A'=\dfrac{AB}{\text{AA'}}=\dfrac{AB}{2R}\Rightarrow \dfrac{AB}{\sin C}=2R$

Tương tự $\dfrac{AC}{\sin B}=2R$; $\dfrac{BC}{\sin A}=2R$. Do đó $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=2R$ (đpcm)

5. $S_{ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R}$

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}CA.CB.\sin C=\dfrac{1}{2}CA.CB.\dfrac{AB}{2R}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R}$ (đpcm)

6. $\dfrac{HA+HB+HC}{HD+HE+HF}\ge 2$.

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $2(HD+HE+HF)\le HA+HB+HC\Leftrightarrow \dfrac{HA+HB+HC}{HD+HE+HF}\ge 2$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

7. $\dfrac{HA.HB.HC}{HD.HE.HF}\ge 8$.

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $HA.HB.HC\ge 8(HD.HE.HF)\Leftrightarrow \dfrac{HA.HB.HC}{HD.HE.HF}\ge 8$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

8. $\dfrac{\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC}}{\sqrt{HD}+\sqrt{HE}+\sqrt{HF}}\ge\sqrt{2}$.

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{HD}+\sqrt{HE}+\sqrt{HF}\right)\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC}}{\sqrt{HD}+\sqrt{HE}+\sqrt{HF}}\ge\sqrt{2}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

9. $IA+IB+IC\ge 6r$.

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm I nằm trong tam giác ABC nên ta có $2(r+r+r)\le IA+IB+IC\Leftrightarrow IA+IB+IC\ge 6r$. (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

10. $IA.IB.IC\ge 8r^3$.

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm I nằm trong tam giác ABC nên ta có $IA.IB.IC\ge 8(r.r.r)\Leftrightarrow IA.IB.IC\ge 8r^3$.(đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

11. $\sqrt{IA}+\sqrt{IB}+\sqrt{IC}\ge 3\sqrt{2r}$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm I nằm trong tam giác ABC nên ta có $\sqrt{IA}+\sqrt{IB}+\sqrt{IC}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{r}+\sqrt{r}+\sqrt{r}\right)\Leftrightarrow \sqrt{IA}+\sqrt{IB}+\sqrt{IC}\ge 3\sqrt{2r}$.(đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

12. $HA+HB+HC\ge 12r_1$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $2(HD+HE+HF)\le HA+HB+HC$ (1).

Mà H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF (*dễ dàng chứng minh được)*

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm H nằm trong tam giác DEF nên ta có $2(r_1+r_1+r_1)\le HD+HE+HF\Leftrightarrow 6r_1\le HD+HE+HF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $HA+HB+HC\ge 12r_1$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

13. $HA.HB.HC\ge 64r_1^3$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $HA.HB.HC \geq 8HD.HE.HF$ (3).

Mà H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF (*dễ dàng chứng minh được*)

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm H nằm trong tam giác DEF nên ta có $HD.HE.HF \geq 8r_1.r_1.r_1 \Leftrightarrow HD.HE.HF \geq 8r_1^3$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $HA.HB.HC \geq 64r_1^3$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

14. $\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC} \geq 6\sqrt{r_1}$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{HD}+\sqrt{HE}+\sqrt{HF}\right)$ (5).

Mà H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF (*dễ dàng chứng minh được*)

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm H nằm trong tam giác DEF nên ta có

$\sqrt{HD}+\sqrt{HE}+\sqrt{HF} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_1}+\sqrt{r_1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{HD}+\sqrt{HE}+\sqrt{HF} \geq 3\sqrt{2}\sqrt{r_1}$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $\sqrt{HA}+\sqrt{HB}+\sqrt{HC} \geq 6\sqrt{r_1}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

15. $HD+HE+HF \leq R+r$.

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $2(HD+HE+HF) \leq HA+HB+HC$.

Mà HA + HB + HC = 2(OJ + OJ' + OJ'') = 2(R +r).

Nên $HD+HE+HF \leq R+r$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

16. $\cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$.

Ta có $BAC = \frac{1}{2}BOC = JOC \Rightarrow \cos A = \frac{OJ}{OA} = \frac{OJ}{R}$

Tương tự: $\cos B = \frac{OJ'}{R}$; $\cos C = \frac{OJ''}{R}$

Suy ra $\cos A+\cos B+\cos C = \frac{OJ+OJ'+OJ''}{R}$ (7)

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm O nằm trong tam giác ABC nên ta có $2(OJ+OJ'+OJ'') \leq OA+OB+OC = 3R \Leftrightarrow OJ+OJ'+OJ'' \leq \frac{3R}{2}$ (8).

Từ (7) và (8) suy ra $\cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

17. $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$.

Ta có tứ giác BFHD nội tiếp nên $B = DHC$, tứ giác HDCE nội tiếp nên $C = AHE$,

tứ giác AEHF nội tiếp nên $A = FHB$

Suy ra $\cos A.\cos B.\cos C = \cos FHB.\cos DHC.\cos AHE = \frac{HF}{HB}.\frac{HD}{HC}.\frac{HE}{HA} = \frac{HD.HE.HF}{HA.HB.HC}$ (9)

Mà $HA.HB.HC \geq 8HD.HE.HF$ (10)

Từ (9) và (10) suy ra $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

18. $\cos A+\cos B+\cos C = 1+\frac{r}{R}$.

Ta có $\cos A+\cos B+\cos C = \frac{OJ+OJ'+OJ''}{R}$

Mà OJ + OJ' + OJ'' = R +r

Nên suy ra $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ (đpcm).

19. $R \geq 2r$.

Ta có $\cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$

Mà $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

Nên suy ra $1+\frac{r}{R} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow R \geq 2r$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

20. $HD+HE+HF \leq OJ+OJ'+OJ'' \leq \frac{3}{2}R$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $HD+HE+HF \leq \frac{HA+HB+HC}{2} = OJ+OJ'+OJ''$ (11)

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm O nằm trong tam giác ABC nên ta có $OJ+OJ'+OJ'' \leq \frac{OA+OB+OC}{2} = \frac{3R}{2}$ (12)

Từ (11) và (12) suy ra $HD+HE+HF \leq OJ+OJ'+OJ'' \leq \frac{3}{2}R$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

21. $HJ+HJ'+HJ'' \geq \frac{3}{2}R$

Ta có $HJ \geq HD$, $HJ' \geq HE$, $HJ'' \geq HF$ (đường xiên và hình chiếu)

Suy ra $HJ+HJ'+HJ'' \geq HD+HE+HF$ mà $HD+HE+HF \leq OJ+OJ'+OJ'' \leq \frac{3}{2}R$

Do đó $HJ+HJ'+HJ'' \geq \frac{3}{2}R$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

22. $AJ+BJ'+CJ'' \leq \frac{9R}{2}$.

Ta có $AJ \leq OA+OJ$ (BĐT tam giác AOJ)

Tương tự: $BJ' \leq OB+OJ'$; $CJ'' \leq OC+OJ''$.

Suy ra $AJ+BJ'+CJ'' \leq 3R+\left(OJ+OJ'+OJ''\right)$

Mà $OJ+OJ'+OJ'' \leq \frac{3R}{2}$.

Do đó $AJ+BJ'+CJ'' \leq \frac{9R}{2}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

23. $\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}} \geq 3\sqrt{2}$.

Ta có $\sqrt{IA}+\sqrt{IB}+\sqrt{IC} \geq 3\sqrt{2r}$

Mà $IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $IB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, $IC=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

Nên suy ra $\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}} \geq 3\sqrt{2}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

24. $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Ta có $IA.IB.IC \geq 8r^3$

Mà $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$, $IB = \dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$, $IC = \dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$

Nên suy ra $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

25. $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$.

Gọi P, M, N lần lượt là trung điểm OC, OA, OB và O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC, COA, AOB.

Ta có O_1O_2 là trung trực của OC; O_2O_3 là trung trực của OA; O_3O_1 là trung trực của OB.

Nên $OO_1 = R_1$, $OO_2 = R_2$, $OO_3 = R_3$ và $OP = OM = ON = \dfrac{R}{2}$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm O nằm trong tam giác $O_1O_2O_3$ nên ta có $OO_1 + OO_2 + OO_3 \geq 2(OP + OM + ON)$

$\Leftrightarrow R_1 + R_2 + R_3 \geq 2\left(\dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{2}\right) = 3R$. Vậy $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

26. $R_1.R_2.R_3 \geq R^3$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm O nằm trong tam giác $O_1O_2O_3$ nên ta có $OO_1.OO_2.OO_3 \geq 8OP.OM.ON$

$\Leftrightarrow R_1.R_2.R_3 \geq 8\dfrac{R}{2}.\dfrac{R}{2}.\dfrac{R}{2} = R^3$. Vậy $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

27. $\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} + \sqrt{R_3} \geq 3\sqrt{R}$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm O nằm trong tam giác $O_1O_2O_3$ nên ta có $\sqrt{OO_1} + \sqrt{OO_2} + \sqrt{OO_3} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{OP} + \sqrt{OM} + \sqrt{ON}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} + \sqrt{R_3} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{R}{2}} + \sqrt{\dfrac{R}{2}} + \sqrt{\dfrac{R}{2}}\right) = 3\sqrt{R}$. Vậy $\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} + \sqrt{R_3} \geq 3\sqrt{R}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

28. $AB.BC.CA \geq 24\sqrt{3}\, r^3$

Ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p.r$

$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2r^2$

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ (13)

Theo định lý Pitago và từ (13) nên ta có $IA^2.IB^2.IC^2 = \left(r^2 + (p-a)^2\right)\left(r^2 + (p-b)^2\right)\left(r^2 + (p-c)^2\right)$

$\Leftrightarrow IA^2.IB^2.IC^2 = \left(\dfrac{(p-a)bc}{p}\right)\left(\dfrac{(p-b)ac}{p}\right)\left(\dfrac{(p-c)ab}{p}\right) = a^2b^2c^2\,\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}$ (14)

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $\dfrac{p}{3} = \dfrac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{p^3}{27}$ (15)

Từ (14), (15) suy ra $IA^2IB^2IC^2 \leq \dfrac{a^2b^2c^2}{27} \Leftrightarrow IA.IB.IC \leq \dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ (16)

Mà $IA.IB.IC \geq 8r^3$ (17)

Từ (16) và (17) suy ra $AB.BC.CA \geq 24\sqrt{3}\, r^3$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

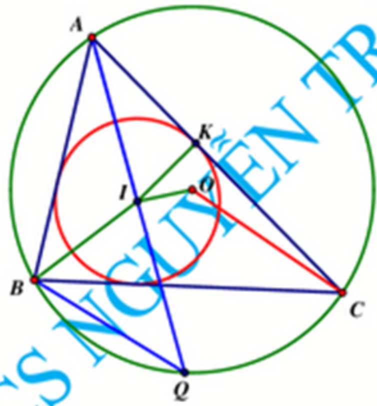
29. $\sin A.\sin B.\sin C \geq 3\sqrt{3}.\left(\frac{r}{R}\right)^3$

Ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow BC = 2R\sin A; CA = 2R\sin B; AB = 2R\sin C$

Mà $AB.BC.CA \geq 24\sqrt{3}\,r^3$

Nên $8R^3\sin A.\sin B.\sin C \geq 24\sqrt{3}\,r^3 \Leftrightarrow \sin A.\sin B.\sin C \geq 24\sqrt{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

30. $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$



Gọi Q là giao điểm của tia phân giác AI với (O;R)

Ta có $BIQ = \frac{BAC + ABC}{2}$ (18)

Mà $QBC = EAC = \frac{BAC}{2}$ (góc nội tiếp cùng chắn QC)

suy ra $IBQ = \frac{BAC + ABC}{2}$ (19)

Từ (18) và (19) suy ra $BIQ = IBQ$

Nên ΔIBQ cân tại Q $\Rightarrow$QI = QB (20)

Gọi K là hình chiếu của I lên AC. Ta có ΔIKA vuông tại K nên $\sin\frac{A}{2} = \frac{IK}{IA}$

Mà $\sin BAQ = \sin\frac{A}{2} = \frac{BQ}{2R}$ (Vì ΔABQ nội tiếp (O;R))

$\Rightarrow \frac{IK}{IA} = \frac{BQ}{2R} \Rightarrow IK.2R = BQ.IA$ (21)

Từ (20) và (21) suy ra $\Rightarrow r.2R = IQ.IA$

Mặt khác IQ.IA = $R^2 - OI^2 \Rightarrow r.2R = R^2 - OI^2 \Rightarrow OI^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R) và ngoại tiếp đường tròn (I;r). Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn (I;r) với các cạnh của tam giác ABC. Lấy điểm M tùy ý nằm trong tam giác ABC. Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm BC, CA, AB.

1. Chứng minh rằng:

a) $AB.BC.CA \geq 8DE.EF.FD$

b) $AN + BP + CQ \leq 4R + r$

c) $MA + MB + MC \geq 6r$.

2. Lấy điểm L trên cung nhỏ BC. Gọi H, J, K lần lượt là hình chiếu của L lên BC, CA, AB. Chứng minh $\frac{BC}{LH} = \frac{AC}{LJ} + \frac{AB}{LK}$.

3. Các đường trung tuyến AN, BP, CQ cắt (O,R) lần lượt tại N_1, P_1, Q_1. Chứng minh: $\frac{NN_1}{BC} + \frac{PP_1}{CA} + \frac{QQ_1}{AB} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau cắt (O,R) lần lượt tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng: $S_{A_2B_2C_2} \leq S_{ABC}$.

5. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là giao điểm của IA, IB, IC với (I,r). Chứng minh: DA_3, EB_3, FC_3 đồng quy.

6. Gọi A_4, B_4, C_4 lần lượt là giao điểm của IA với EF, IB với FD, IC với DE. Chứng minh:

a) I là trực tâm của tam giác $A_4B_4C_4$.

b) $IA_4 + IB_4 + IC_4 \le \dfrac{3r}{2}$

c) $IA_4.IB_4.IC_4 \le \dfrac{r^3}{8}$

d) $\sqrt{IA_4} + \sqrt{IB_4} + \sqrt{IC_4} \le \dfrac{3\sqrt{2r}}{2}$

7. Gọi P’, Q’, U’ lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

a) $IP' + IQ' + IU' \ge IA + IB + IC \ge 6r$

b) $IP'.IQ'.IU' \ge IA.IB.IC \ge 8r^3$

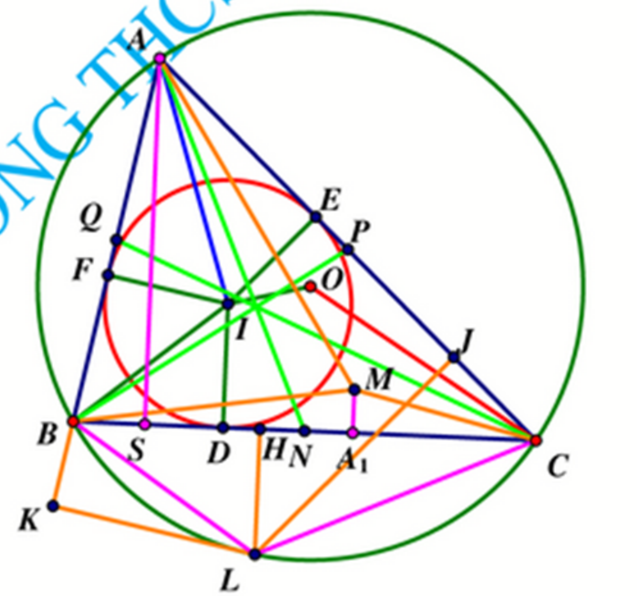
c) $\sqrt{IP'} + \sqrt{IQ'} + \sqrt{IU'} \ge \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \ge 3\sqrt{2r}$

d) AP’ +BQ’ + CU’ > AB + BC + CA

8. Gọi P_1' là giao điểm AP’ với BC, Q_1' là giao điểm BP’ với CA, U_1' là giao điểm CU’ với AB.

Chứng minh rằng: $\dfrac{P'P_1'}{BP' + P'C} + \dfrac{Q'Q_1'}{CQ' + Q'A} + \dfrac{U'U_1'}{AU' + U'B} \ge \dfrac{3}{4}$

Lời giải.



1.a) Đặt BC = a, CA = b, AB = c và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng định lý Ptoleme cho các tứ giác nội tiếp IEAF, IFBA, IDCE.

Ta có IA.EF = IE.AF + IF.AE

Hay IA.EF = 2r(p - a) (1)

Tương tự: IB.DF = 2r(p - b) (2)

IC.DE = 2r(p - c) (3)

Nhân (1), (2), (3) vế theo vế ta được

$IA.IB.IC.DE.DF.EF = 8r^3(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow IA.IB.IC = \dfrac{8r^3(p-a)(p-b)(p-c)}{DE.DF.EF}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$(p-a)(p-b) \le \left[\dfrac{(p-a)+(p-b)}{2}\right]^2 = \dfrac{c^2}{4}$; $(p-b)(p-c) \le \left[\dfrac{(p-b)+(p-c)}{2}\right]^2 = \dfrac{a^2}{4}$;

$(p-c)(p-a) \le \left[\dfrac{(p-c)+(p-a)}{2}\right]^2 = \dfrac{b^2}{4}$

Suy ra $(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8}$ (5)

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm I nằm trong tam giác ABC nên ta có $IA.IB.IC \ge 8r^3$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $AB.BC.CA \ge 8DE.EF.FD$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

1.b) Ta có $AN \le OA+ON=R+ON$ (BĐT tam giác AON)

Tương tự: $BP \le OB+OP$; $CQ \le OC+OQ$.

Suy ra $AN+BP+CQ \le 3R+(ON+OP+OQ)$

Mà $ON+OP+OQ=R+r$.

Do đó suy ra $AN+BP+CQ \le 4R+r$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

1.c) Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Kẻ AS vuông góc với BC, MA_1 vuông góc BC. Khi đó ta có $AM+MA_1 \ge AA_1 \ge AH$. Suy ra $AM \ge AH - MA_1 \Rightarrow AM \ge \frac{2S_{ABC}}{BC} - x$

Tương tự $BM \ge \frac{2S_{ABC}}{CA} - y$; $CM \ge \frac{2S_{ABC}}{AB} - z$.

Do đó suy ra

$$MA+MB+MC \ge 2S_{ABC}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right)-(x+y+z)=r(BC+CA+AB)\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right)-(x+y+z)\ (7)$$

Mà $(BC+CA+AB)\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right) \ge 9$ (8)

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm M nằm trong tam giác ABC nên ta có $MA+MB+MC \ge 2(x+y+z)$ (9).

Từ (7), (8), (9) suy ra $MA+MB+MC \ge 9r - \left(\frac{MA+MB+MC}{2}\right)$ hay $MA+MB+MC \ge 6r$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

2. Chứng minh $\frac{BC}{LH}=\frac{AC}{LJ}+\frac{AB}{LK}$.

Ta có $LCH = LAK$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BL) nên Δ LHC và Δ LKA đồng dạng. Do đó $\frac{LH}{LK}=\frac{LC}{LA} \Rightarrow LC=\frac{LH.LA}{LK}$ (10)

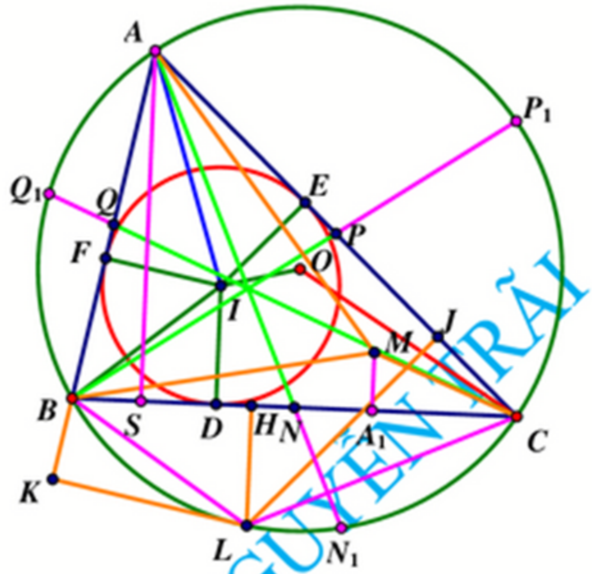
Ta có $LBH = LAJ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CL) nên Δ LHB và Δ LJA đồng dạng. Do đó $\frac{LH}{LJ}=\frac{LB}{LA} \Rightarrow LB=\frac{LH.LA}{LJ}$ (11)

Áp dụng định lý Ptoleme cho tứ giác nội tiếp ABLC, ta có LA.BC = LB.AC + LC.AB (12)

Từ (10), (11), (12) suy ra $LA.BC=\frac{LH.LA}{LJ}.AC+\frac{LH.LA}{LK}.AB$ (13)

Chia cả hai vế của (13) cho cùng LH.LA $\Rightarrow \frac{BC}{LH}=\frac{AC}{LJ}+\frac{AB}{LK}$ (đpcm).

3. Các đường trung tuyến AN, BP, CQ cắt (O,R) lần lượt tại N_1, P_1, Q_1. Chứng minh: $\frac{NN_1}{BC}+\frac{PP_1}{CA}+\frac{QQ_1}{AB}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$



Đặt BC = a, CA = b, AB = c. Từ công thức độ dài đường trung tuyến $AN=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$

Mà ta lại có $NA.NN_1 = NB.NC = \frac{a^2}{4}$ (vì tứ giác ABN_1C nội tiếp đường tròn)

nên suy ra $NN_1=\frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}$

Tương tự: $PP_1=\frac{b^2}{2\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}}$

$$QQ_1=\frac{c^2}{2\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}$$

Áp dụng BĐT $xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}$, ta thấy:

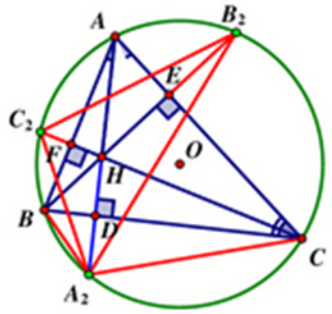
$$\frac{NN_1}{a}=\frac{a^2}{2a\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{a\sqrt{3}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự: $\frac{PP_1}{b}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$; $\frac{QQ_1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Do đó $\frac{NN_1}{a}+\frac{PP_1}{b}+\frac{QQ_1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ hay $\frac{NN_1}{BC}+\frac{PP_1}{CA}+\frac{QQ_1}{AB}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

4. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau cắt (O) lần lượt tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng: $S_{A_2B_2C_2}\leq S_{ABC}$.

Lời giải.



* CMR: $\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}}=\frac{HA_2.HB_2.HC_2}{HA.HB.HC}$

Ta có

$$S_{A_2B_2C_2}=\frac{A_2B_2.B_2C_2.C_2A_2}{4R}, S_{ABC}=\frac{AB.BC.CA}{4R}\Rightarrow\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}}=\frac{A_2B_2.B_2C_2.C_2A_2}{AB.BC.CA}$$

Ta có $\Delta HBC \backsim \Delta HC_2B_2$ (g.g) $\Rightarrow\frac{B_2C_2}{BC}=\frac{HC_2}{HB}$

$\Delta HBA \backsim \Delta HA_2B_2$ (g.g) $\Rightarrow\frac{A_2B_2}{AB}=\frac{HB_2}{HA}$

$\Delta HAC \backsim \Delta HC_2A_2$ (g.g) $\Rightarrow\frac{C_2A_2}{AC}=\frac{HA_2}{HC}$

Từ đó suy ra $\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}}=\frac{HA_2.HB_2.HC_2}{HA.HB.HC}$

Ta có tứ giác ACA_2B nội tiếp đường tròn $\Rightarrow ACD = AA_2B$ (cùng chắn cung AB) mà $ACD = AHE$ (cùng phụ với HAC) và $BHD = AHE$ (đối đỉnh) nên $\Rightarrow BHD = AA_2B$. Do đó ΔHBA_2 cân tại B $\Rightarrow HD = DA_2$

$\Rightarrow HA_2 = 2HD$

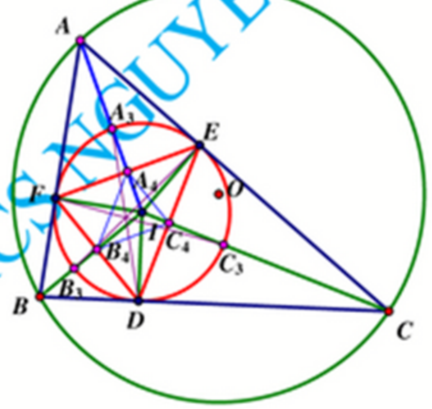
Tương tự $HB_2 = 2HE, HC_2 = 2HF$

Nên $\Rightarrow \dfrac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} = \dfrac{HA_2.HB_2.HC_2}{HA.HB.HC} = \dfrac{8.HD.HE.HE}{HA.HB.HC}$

mà Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm H nằm trong tam giác ABC nên ta có $HA.HB.HC \geq 8HD.HE.HF \Leftrightarrow \dfrac{HA.HB.HC}{HD.HE.HF} \geq 8$

Do đó $\Rightarrow \dfrac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} = \dfrac{HA_2.HB_2.HC_2}{HA.HB.HC} = \dfrac{8.HD.HE.HE}{HA.HB.HC} \leq 1$.hay $S_{A_2B_2C_2} \leq S_{ABC}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

5. Gọi A₃, B₃, C₃ lần lượt là giao điểm của IA, IB, IC với (I,r). Chứng minh: DA₃, EB₃, FC₃ đồng quy.



Ta có $\widehat{AIE} = \widehat{AIF}$ nên $\widehat{A_3IE} = \widehat{A_3IF}$ suy ra $\widehat{A_3DE} = \widehat{A_3DF}$

(góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

Do đó DA_3 là phân giác $\widehat{EDF}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có EB_3 là phân giác $\widehat{DEF}$;

FC_3 là phân giác $\widehat{DFE}$.

Vậy DA_3, EB_3, FC_3 đồng quy.

6. Gọi A_4, B_4, C_4 lần lượt là giao điểm của IA với EF, IB với FD, IC với DE. Chứng minh: a) I là trực tâm của tam giác $A_4B_4C_4$.

b) $IA_4 + IB_4 + IC_4 \leq \dfrac{3r}{2}$

c) $IA_4.IB_4.IC_4 \leq \dfrac{r^3}{8}$

d) $\sqrt{IA_4} + \sqrt{IB_4} + \sqrt{IC_4} \leq \dfrac{3\sqrt{2r}}{2}$

a) Ta có ΔIEF cân tại I mà IA_3 là phân giác của $\widehat{EIF}$ nên $EA_4 = FA_4$ và $IA_4 \perp EF$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $FB_4 = EB_4$ và $IB_4 \perp FD$; $DC_4 = EC_4$ và $IC_4 \perp DE$. Nên $B_4C_4 // FE$, $C_4A_4 // DF$, $A_4B_4 // DE$. Do đó suy ra $IA_4 \perp B_4C_4$, $IB_4 \perp C_4A_4$, $IC_4 \perp A_4B_4$. Nên I là trực tâm của tam giác $A_4B_4C_4$ (đpcm).

b) Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng đối với điểm I nằm trong tam giác DEF nên ta có

$ID + IE + IF \geq 2\left(IA_4 + IB_4 + IC_4\right) \Leftrightarrow 3r \geq 2\left(IA_4 + IB_4 + IC_4\right) \Leftrightarrow IA_4 + IB_4 + IC_4 \leq \dfrac{3r}{2}$ (đpcm).

c) Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích đối với điểm I nằm trong tam giác DEF nên ta có

$ID.IE.IF \geq 8IA_4.IB_4.IC_4 \Leftrightarrow r^3 \geq 8IA_4.IB_4.IC_4 \Leftrightarrow IA_4.IB_4.IC_4 \leq \dfrac{r^3}{8}$ (đpcm).

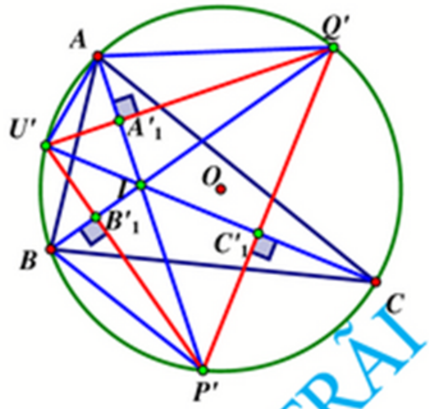
d) Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng căn thức đối với điểm I nằm trong tam giác DEF nên ta có

$\sqrt{ID} + \sqrt{IE} + \sqrt{IF} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{IA_4} + \sqrt{IB_4} + \sqrt{IC_4}\right) \Leftrightarrow 3\sqrt{r} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{IA_4} + \sqrt{IB_4} + \sqrt{IC_4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{IA_4} + \sqrt{IB_4} + \sqrt{IC_4} \leq \dfrac{3\sqrt{2r}}{2}$ (đpcm).

7. Gọi P', Q', U' lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

a) $IP' + IQ' + IU' \geq IA + IB + IC \geq 6r$



Ta có AP', BQ', CU' là ba đường phân giác của tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Ta lại có AP' ⊥ Q'U', BQ' ⊥ P'Q', CU' ⊥ P'U' nên suy ra I là trực tâm tam giác P'Q'U'

Gọi $A_1^{'}, B_1^{'}, C_1^{'}$ lần lượt là chân các đường cao của tam giác P'Q'U'. Ta có $IA = 2IA_1^{'}, IB = 2IB_1^{'}, IC = 2IC_1^{'}$
Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tổng cho điểm I nằm trong tam giác P'Q'U' nên ta có $IP' + IQ' + IU' \geq 2(IA_1^{'} + IB_1^{'} + IC_1^{'})$
Nên suy ra $IP' + IQ' + IU' \geq IA + IB + IC \geq 6r$ (đpcm).Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

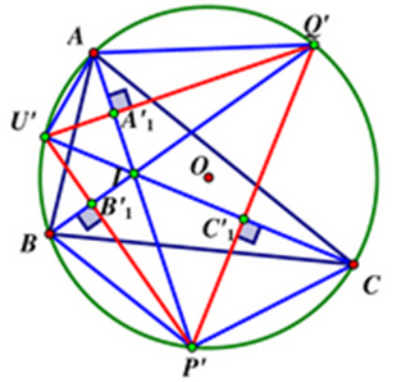
b) $IP'.IQ'.IU' \geq IA.IB.IC \geq 8r^3$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng tích cho điểm I nằm trong tam giác P'Q'U' nên ta có $IP'.IQ'.IU' \geq 8IA_1^{'}.IB_1^{'}.IC_1^{'} = 2IA_1^{'}.2IB_1^{'}.2IC_1^{'}$
Nên suy ra $IP'.IQ'.IU' \geq IA.IB.IC \geq 8r^3$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

c) $\sqrt{IP'} + \sqrt{IQ'} + \sqrt{IU'} \geq \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \geq 3\sqrt{2r}$

Áp dụng BĐT Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm I nằm trong tam giác P'Q'U' nên ta có $\sqrt{IP'} + \sqrt{IQ'} + \sqrt{IU'} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{IA_1^{'}} + \sqrt{IB_1^{'}} + \sqrt{IC_1^{'}}\right) = \sqrt{2IA_1^{'}} + \sqrt{2IB_1^{'}} + \sqrt{2IC_1^{'}} = \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \geq 3\sqrt{2r}$ Nên suy ra $\sqrt{IP'} + \sqrt{IQ'} + \sqrt{IU'} \geq \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \geq 3\sqrt{2r}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

d) AP' +BQ' + CU' > AB + BC + CA



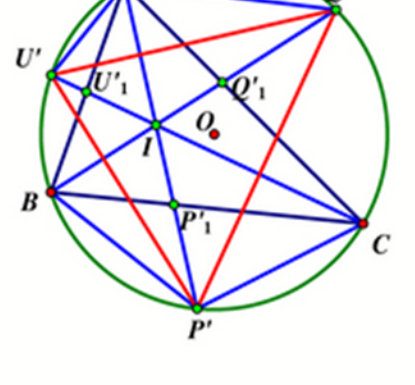
Áp dụng định lý Ptôlême cho tứ giác nội tiếp ABP'C, ta có :
AP'.BC = AB. P'C + AC.BP' = (AB + AC)P'B (vì P'B = P'C)
Mà BC < BP' + P'C = 2. P'B

$\Rightarrow AP'.BC > (AB + AC)\dfrac{BC}{2} \Rightarrow AP' > \dfrac{AB + AC}{2}$ (1)

Tương tự: $BQ' > \dfrac{BA + BC}{2}$ (2), $CU' > \dfrac{CB + CA}{2}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được:
AP' +BQ' + CU' > AB + BC + CA (đpcm).

8. Gọi $P_1^{'}$ là giao điểm AP' với BC, $Q_1^{'}$ là giao điểm BP' với CA, $U_1^{'}$ là giao điểm CU' với AB. Chứng minh rằng: $\dfrac{P^{'}P_1^{'}}{BP^{'} + P^{'}C} + \dfrac{Q^{'}Q_1^{'}}{CQ^{'} + Q^{'}A} + \dfrac{U^{'}U_1^{'}}{AU^{'} + U^{'}B} \geq \dfrac{3}{4}$



Áp dụng định lý Ptôlême cho tứ giác nội tiếp ABP'C, ta có :
AP'.BC = AB. P'C + AC.BP' = (AB + AC)P'B (vì P'B = P'C)

$\Rightarrow \dfrac{P^{'}C}{AP^{'}} = \dfrac{BC}{AB + AC}$

Mặt khác $\Delta CP^{'}P_1^{'} \sim \Delta ACP^{'}$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{P^{'}P_1^{'}}{P^{'}C} = \dfrac{CP^{'}}{AP^{'}} \Rightarrow \dfrac{P^{'}P_1^{'}}{2.P^{'}C} = \dfrac{CP^{'}}{2.AP^{'}}$

$\Rightarrow \dfrac{P^{'}P_1^{'}}{BP^{'} + P^{'}C} = \dfrac{BC}{2(AB+AC)}$

Tương tự $\frac{Q'Q_1'}{CQ'+Q'A}=\frac{\text{AC}}{2(\text{AB+BC})}$; $\frac{U'U_1'}{AU'+U'B}=\frac{\text{AB}}{2(\text{AC+BC})}$

Do đó suy ra $\frac{P'P_1'}{BP'+P'C}+\frac{Q'Q_1'}{CQ'+Q'A}+\frac{U'U_1'}{AU'+U'B}=\frac{\text{BC}}{2(\text{AB+AC})}+\frac{\text{AC}}{2(\text{AB+BC})}+\frac{\text{AB}}{2(\text{AC+BC})}$

Áp dung BĐT: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\ (a,b,c>0)$

Từ đó suy ra $\frac{P'P_1'}{BP'+P'C}+\frac{Q'Q_1'}{CQ'+Q'A}+\frac{U'U_1'}{AU'+U'B}\ge\frac{3}{4}$(đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\Delta ABC$ là tam giác đều.