ÔN TẬP HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG QUA MỘT BÀI TOÁN

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN.

1. Định nghĩa. $\Delta ABC \backsim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, \widehat{C} = \widehat{F} \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = k \end{cases}$

2. Tính chất.

+ Nếu $\Delta ABC = \Delta DEF \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEF$ theo tỉ số đồng dạng k = 1.

+ Nếu $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ theo tỉ số đồng dạng là k thì $\Delta DEF \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng là $\dfrac{1}{k}$.

+ Nếu $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ theo tỉ số đồng dạng là k_1 và $\Delta DEF \backsim \Delta PTQ$ theo tỉ số đồng dạng là k_2 thì $\Delta ABC \backsim \Delta PTQ$ theo tỉ số đồng dạng là $k_1.k_2$.

+ Nếu $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng là k thì $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$ và $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{d}{d'} = \dfrac{h}{h'} = \dfrac{p}{p'} = k$ (với $m, m', d, d', h, h', p, p'$ lần lượt là đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao, chu vi tương ứng của $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$.

+ Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ ba thì tạo thành tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

3. Dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng.

+ Nếu ΔABC và ΔDEF có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (c.c.c)

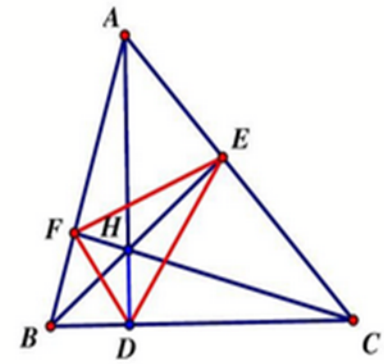
+ Nếu ΔABC và ΔDEF có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ và $\widehat{A} = \widehat{D}$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (c.g.c)

+ Nếu ΔABC và ΔDEF có $\widehat{A} = \widehat{D}$ và $\widehat{B} = \widehat{E}$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (g.g)

II. BÀI TẬP.

Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Nối D, E, F với nhau.Tìm tất cả các cặp tam giác đồng dạng với nhau? Vì sao?

Lời giải.



1.Xét Δ ABE và Δ ACF có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0$.

Do đó Δ ABE $\backsim$ Δ ACF (g.g).

2. Xét Δ ABD và Δ CFB có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{ADB} = \widehat{CFB} = 90^0$.

Do đó Δ ABD $\backsim$ Δ CFB (g.g).

3.Xét Δ BEC và Δ ADC có $\widehat{C}$ chung và $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 90^0$

Do đó Δ BEC $\backsim$ Δ ADC (g.g).

4. Xét Δ AEH và Δ ADC có $\widehat{DAC}$ chung và $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90^0$.

Do đó $\Delta AEH \backsim \Delta ADC$ (g.g).

5. Xét ΔABD và ΔAHF có $\widehat{BAD}$ chung và $\widehat{ADB} = \widehat{AFH} = 90^0$.
Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AHF$ (g.g).

6. Xét ΔBHD và ΔBCE có $\widehat{EBC}$ chung và $\widehat{BDH} = \widehat{BEC} = 90^0$.
Do đó $\Delta BHD \backsim \Delta BCE$ (g.g).

7. Xét ΔAEB và ΔHFB có $\widehat{ABE}$ chung và $\widehat{AEB} = \widehat{HFB} = 90^0$
Do đó $\Delta AEB \backsim \Delta ADC$ (g.g).

8. Xét ΔACF và ΔHCE có $\widehat{ACF}$ chung và $\widehat{AFC} = \widehat{HEC} = 90^0$
Do đó $\Delta ACF \backsim \Delta HCE$ (g.g).

9. Xét ΔCHD và ΔCBF có $\widehat{FCB}$ chung và $\widehat{CDH} = \widehat{CFB} = 90^0$.
Do đó $\Delta CHD \backsim \Delta CBF$ (g.g).

10. Xét ΔAFH và ΔCDH có $\widehat{AHF} = \widehat{CHD}$ (đđ) và $\widehat{AFH} = \widehat{CDH} = 90^0$.
Do đó $\Delta AFH \backsim \Delta CDH$ (g.g).

11. Xét ΔBFH và ΔCEH có $\widehat{BHF} = \widehat{CHE}$ (đđ) và $\widehat{BFH} = \widehat{CEH} = 90^0$.
Do đó $\Delta BFH \backsim \Delta CEH$ (g.g).

12. Xét ΔAEH và ΔBDH có $\widehat{AHE} = \widehat{CHD}$ (đđ) và $\widehat{AEH} = \widehat{BDH} = 90^0$.
Do đó $\Delta AEH \backsim \Delta BDH$ (g.g).

13. Xét ΔEHF và ΔBHC có $\widehat{EHF} = \widehat{BHC}$ (đđ) và $\dfrac{HE}{HF} = \dfrac{HB}{HC}$ (Vì $\Delta BFH \backsim \Delta CEH$).

Do đó $\Delta EHF \backsim \Delta BHC$ (c.g.c).

14. Xét ΔEHD và ΔAHB có $\widehat{EHD} = \widehat{AHB}$ (đđ) và $\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HA}{HB}$ (Vì $\Delta AEH \backsim \Delta BDH$).

Do đó $\Delta EHD \backsim \Delta AHB$ (c.g.c).

15. Xét ΔFHD và ΔAHC có $\widehat{FHD} = \widehat{AHC}$ (đđ) và $\dfrac{HF}{HD} = \dfrac{HA}{HC}$ (Vì $\Delta AFH \backsim \Delta CDH$).

Do đó $\Delta FHD \backsim \Delta DBF$ (g.g).

16. Xét ΔAEF và ΔABC có $\widehat{A}$ chung và $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$ (Vì $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$).

Do đó $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

17. Xét ΔBDF và ΔBAC có $\widehat{B}$ chung và $\dfrac{BD}{BF} = \dfrac{AB}{AC}$ (Vì $\Delta ABD \backsim \Delta CFB$).

Do đó $\Delta BDF \backsim \Delta BAC$ (c.g.c).

18. Xét ΔCED và ΔCBA có $\widehat{C}$ chung và $\dfrac{CE}{CD} = \dfrac{BC}{AC}$ (Vì $\Delta BEC \backsim \Delta ADC$).

Do đó $\Delta CED \backsim \Delta CBA$ (c.g.c).

19. Xét ΔBAH và ΔDAF có $\widehat{BAD}$ chung và $\widehat{ABH}=\widehat{ADF}(=\widehat{ACF})$.
Do đó $\Delta BAH \backsim \Delta DAF$ (g.g).

20. Xét ΔCAH và ΔDAE có $\widehat{DAC}$ chung và $\widehat{ACH}=\widehat{ADB}(=\widehat{ABE})$.
Do đó $\Delta CAH \backsim \Delta DAE$ (g.g).

21. Xét ΔABH và ΔEBF có $\widehat{ABE}$ chung và $\widehat{BAH}=\widehat{BEF}(=\widehat{BCF})$.
Do đó $\Delta ABH \backsim \Delta EBF$ (g.g).

22. Xét ΔCHB và ΔEDB có $\widehat{EBC}$ chung và $\widehat{HCB}=\widehat{DEB}(=\widehat{BAD})$.
Do đó $\Delta CHB \backsim \Delta EDB$ (g.g).

23. Xét ΔDCF và ΔBCH có $\widehat{FCB}$ chung và $\widehat{DFC}=\widehat{BHC}(=\widehat{DAC})$.
Do đó $\Delta DCF \backsim \Delta BCH$ (g.g).

24. Xét ΔACH và ΔFCE có $\widehat{ACF}$ chung và $\widehat{HAC}=\widehat{BFC}(=\widehat{EBC})$.
Do đó $\Delta ACH \backsim \Delta FCE$ (g.g).

25. Xét ΔABE và ΔHCE có $\widehat{AEB}=\widehat{HEC}=90^0$ và $\widehat{ABE}=\widehat{HCE}$ (cùng phụ $\widehat{A}$).
Do đó $\Delta ABE \backsim \Delta HCE$ (g.g).

26. Xét ΔACF và ΔHBF có $\widehat{AFC}=\widehat{HFB}=90^0$, và $\widehat{ACF}=\widehat{HBF}$ (cùng phụ $\widehat{A}$).
Do đó $\Delta ACF \backsim \Delta HBF$ (g.g).

27. Xét ΔABD và ΔCHD có $\widehat{ADB}=\widehat{CDH}=90^0$ và $\widehat{BAD}=\widehat{HCD}$ (cùng phụ $\widehat{B}$).
Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta CHD$ (g.g).

28. Xét ΔCBF và ΔAHF có $\widehat{CFB}=\widehat{AFH}=90^0$ và $\widehat{FCB}=\widehat{FAH}$ (cùng phụ $\widehat{B}$).
Do đó $\Delta CBF \backsim \Delta AHF$ (g.g).

29. Xét ΔADC và ΔBDH có $\widehat{ADC}=\widehat{BDH}=90^0$ và $\widehat{DAC}=\widehat{DBH}$ (cùng phụ $\widehat{C}$).
Do đó $\Delta ADC \backsim \Delta BDH$ (g.g).

30. Xét ΔBEC và ΔAEH có $\widehat{BEC}=\widehat{AEH}=90^0$ và $\widehat{EBC}=\widehat{EAH}$ (cùng phụ $\widehat{C}$).
Do đó $\Delta BEC \backsim \Delta AEH$ (g.g).

31. Xét ΔAEF và ΔDBF có $\widehat{EAF}=\widehat{BDF}$ (Vì $\Delta BDF \backsim \Delta BAC$) và $\widehat{AEF}=\widehat{DBF}$ (Vì $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$).Do đó $\Delta AEF \backsim \Delta DBF$ (g.g).

32. Xét ΔDBF và ΔDEC có $\widehat{DBF}=\widehat{DEC}$ (Vì $\Delta DEC \backsim \Delta ABC$) và $\widehat{DFB}=\widehat{DCE}$ (Vì $\Delta DBF \backsim \Delta ABC$). Do đó $\Delta DBF \backsim \Delta DEC$ (g.g).

33. Xét ΔAFD và ΔEFB có $\widehat{FAD}=\widehat{FEB}$ (Vì $\Delta ABH \backsim \Delta EBF$) và $\widehat{ADF}=\widehat{EBF}$ (Vì $\Delta ABH \backsim \Delta ADF$). Do đó $\Delta AFD \backsim \Delta EFB$ (g.g).

34. Xét ΔAEF và ΔDEC có $\widehat{AEF}=\widehat{DEC}=(\widehat{ABC})$ và $\widehat{AFE}=\widehat{DCE}$ (Vì $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$). Do đó $\Delta AEF \backsim \Delta DEC$ (g.g).

35. Xét ΔEHF và ΔCDF có $\widehat{EHF}=\widehat{FDC}(=\widehat{BHC})$ và $\widehat{HEF}=\widehat{FCD}$ (Vì $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$).Do đó $\Delta EHF \backsim \Delta CDF$ (g.g).

36. Xét ΔFDC và ΔBDE có $\widehat{FDC}=\widehat{BDE}(=\widehat{BHC})$ và $\widehat{FCD}=\widehat{BED}$ (Vì $\Delta BED \backsim \Delta BCH$).Do đó $\Delta FDC \backsim \Delta BDE$ (g.g).

37. Xét ΔEHF và ΔBDE có $\widehat{EHF}=\widehat{BDE}(=\widehat{BHC})$ và $\widehat{HEF}=\widehat{DBE}$ (Vì $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$).Do đó $\Delta EHF \backsim \Delta BDE$ (g.g).

38. Xét ΔFEC và ΔAED có $\widehat{FEC}=\widehat{AED}\,(=\widehat{AHC})$ và $\widehat{FCE}=\widehat{ADE}$ (Vì $\Delta ACH \backsim \Delta ADE$). Do đó $\Delta FEC \backsim \Delta AED$ (g.g).

39. Xét ΔEHD và ΔAFD có $\widehat{HED}=\widehat{FAD}(=\widehat{BCH})$ và $\widehat{EDH}=\widehat{ADF}(\widehat{ABE}=\widehat{ACF})$.
Do đó $\Delta EHD \backsim \Delta AFD$ (g.g).

40. Xét ΔEHD và ΔEFB có $\widehat{DEH}=\widehat{BEF}(\widehat{BAD}=\widehat{BCF})$ và $\widehat{HDE}=\widehat{FBE}(=\widehat{HDF})$.
Do đó $\Delta EHD \backsim \Delta EFB$ (g.g).

41. Xét ΔFHD và ΔFEC có $\widehat{HFD}=\widehat{EFC}(\widehat{EBC}=\widehat{DAC})$ và $\widehat{HDF}=\widehat{ECF}(=\widehat{HDE})$.
Do đó $\Delta FHD \backsim \Delta FEC$ (g.g).

42. Xét ΔFHD và ΔAED có $\widehat{FDH}=\widehat{ADE}(\widehat{ABE}=\widehat{ACF})$ và $\widehat{HFD}=\widehat{EAD}(=\widehat{EBC})$.
Do đó $\Delta FHD \backsim \Delta AED$ (g.g).

Tóm lại: Ta có: $\Delta AFH \backsim \Delta ADB \backsim \Delta CDH \backsim \Delta CFB \Rightarrow$ có 6 cặp
$\Delta BFH \backsim \Delta BEA \backsim \Delta CEH \backsim \Delta CFA \Rightarrow$ có 6 cặp
$\Delta ABC \backsim \Delta AEF \backsim \Delta DEC \backsim \Delta DBF \Rightarrow$ có 6 cặp
$\Delta AEH \backsim \Delta ADC \backsim \Delta BDH \backsim \Delta BEC \Rightarrow$ có 6 cặp
$\Delta HED \backsim \Delta HAB \backsim \Delta FEB \backsim \Delta FAD \Rightarrow$ có 6 cặp
$\Delta HEF \backsim \Delta HCB \backsim \Delta DEB \backsim \Delta DCF \Rightarrow$ có 6 cặp
$\Delta HFD \backsim \Delta HAC \backsim \Delta EFC \backsim \Delta EAD \Rightarrow$ có 6 cặp
Do đó có tất cả 42 cặp tam giác đồng dạng với nhau.

III. VẬN DỤNG.

Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

Bài 1. Chứng minh rằng:

1) BF.BA = BH.BE = BD.BC
2) HA.HD = HB.HE = HC.HF
3) $\dfrac{AE^2}{AB^2}=\dfrac{AF.EF}{AC.BC}=\cos^2 A$.
4) $BH.BE + CH.CF + AH.AD = \dfrac{1}{2}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$.

5) H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

6) AE.CD.BF = AF.BD.CE = DE.EF.FD.

7) $\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=\frac{DH}{AD}+\frac{EH}{BE}+\frac{FH}{CF}=\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}$.

8) $\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=\frac{CB}{CD}.\frac{HD}{HA}.\frac{FA}{FB}=1$.

9) $\frac{S_{AEF}}{AH^2}=\frac{S_{BDF}}{BH^2}=\frac{S_{CDE}}{CH^2}$.

10) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.

11) $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

12) $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\cos^2 A$.

13) $\frac{S_{BFEC}}{S_{ABC}}=\sin^2 A$

14) $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\sin^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$.

15) A, B, C là các tâm đường tròn bàng tiếp của $\triangle DEF$.

16) $\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A$

17) $\frac{BC}{AH}+\frac{AC}{BH}=\frac{AB}{HF}$.

18) $\frac{EA}{EC}+\frac{FA}{FB}=\frac{HA}{HD}$.

19) AH.EF = AF.HE + HF.AE.

Bài 2. Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì có tất cả bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng.

Bài 3. Đường thẳng qua H vuông góc với HJ cắt AC tại Q và AB tại R. CMR: H là trung điểm của QR.

Bài 4. Gọi F', E' là giao điểm của FE với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. CMR: AF' là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DHF'.

Bài 5. Kẻ trung trực của AH cắt AB, AC lần lượt tại E_5, E_6. Chứng minh A là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác OE_5E_6. (OA là phân giác góc E_5OE_6).

Bài 6. Gọi P' là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Chứng minh rằng AP' là phân giác $\widehat{HAO}$.

Bài 7. Kẻ đường kính AA' cắt BC tại A_1. Chứng minh: a) $\frac{DB}{DC}+\frac{A_1B}{A_1C}\ge 2\frac{AB}{AC}$

b) $TA_1//HA'$

Bài 8. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của các tia AD, BE, CF với (O). Tính: $\frac{AA_2}{AD}+\frac{BB_2}{BE}+\frac{CC_2}{CF}$.

Bài 9. Gọi P là giao điểm của đường thẳng BC và EF. Chứng minh: $\frac{PB}{PC} = \frac{DB}{DC}$

Bài 10. Qua D kẻ đường thẳng d song song với EF cắt AB, HC lần lượt tại V và S_1 . Chứng minh D là trung điểm của VS_1.

Bài 11. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh 3 điểm H, G, O thẳng hàng.

Bài 12. Chứng minh : $S_{ABC} = OA.(EF + FD + DE)$.